研究ノート

動学的リスク管理：有限時間のケース

山　下　純　一

目　次

1. 有限視野の DP 方程式

一方，ある時点 t からはじまって，有限時刻 $\tau<\infty$ までの利得のフローの合計と，その後に残される「遺産」（bequest）をあらわす関数 Ψ の最大化が問題となるときは，有限時間の最大化

$$V(t,\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{u}\in U} \ E_{t\mathbf{x}}\left\{\int_t^T L(s,\mathbf{X}(s),\mathbf{u}(s))ds + \Psi(\tau,\mathbf{X}(\tau))\right\} \qquad (1)$$

が目的関数となる。ここで $L(s,\mathbf{X}(s),\mathbf{u}(s))$ は利得（効用）関数であり，Ψ は時刻 τ であるプロジェクトを断念したときのサルベージバリューをあらわすと考えることもできる。

状態変数 $\mathbf{X}(s)=(X_1(s),...,X_n(s))'$ と制御 $\mathbf{u}(s)=(u_1(s),...,u_m(s))'$ の時間的な推移は状態方程式によって記述される[1]。状態方程式として以下では R^n を状態空間とする拡散型の制御つき確率微分方程式を主に考察する：$s\geq t\geq 0$ に対して，

1　プライムは転置を表す。

$$dX(s) = \mathbf{b}(s, \mathbf{X}(s), \mathbf{u}(s))ds + \sigma(s, \mathbf{X}(s), \mathbf{u}(s))d\mathbf{w}(s), \quad \mathbf{X}(t) = \mathbf{x} \in R^n. \tag{2}$$

とおく。ここで $\mathbf{b}$ は n 次元（列）ベクトル，σ は $n \times m$ 行列であり，$\mathbf{w}(s) = (w_1(s), ..., w_n(s))'$ は n 次元標準ブラウン運動である。

(2) をみたす $\mathbf{X}(t)$（強い解）について

$$\tilde{A}V(t,\mathbf{x}) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{E_{t\mathbf{x}}V(t+h, \mathbf{X}(t+h)) - V(t,\mathbf{x})}{h}$$

によって定義される後退発展作用素 $\tilde{A}$ がどうなるかをもとめる。まず，制御をしばらく $\mathbf{v}$ に固定する：$\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}$ for $\forall t \geq 0$. $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}$ のときの $\tilde{A}$ を $\tilde{A}^v$ と記す。伊藤の公式より，

$$\tilde{A}^{\mathbf{v}}V(t,\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}(t,\mathbf{x},\mathbf{v})\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(t,\mathbf{x},\mathbf{v})\frac{\partial V}{\partial x_i} \tag{3}$$

である[2]。ここで a_{ij} は行列 $\sigma\sigma'$ の (i,j) 成分である。

生成作用素をもちいると，(1) で定まる関数 $V(t,\mathbf{x})$ が満たすべき関係式を以下のようにあらわすことができる：

$$0 = \max_{\mathbf{v} \in \mathcal{U}}\left[\tilde{A}^{\mathbf{v}}V(t,\mathbf{x}) + L(t,\mathbf{x},\mathbf{v})\right], \ \forall (t,\mathbf{x}) \in [0,\tau) \times R^n, \tag{4}$$

$$V(\tau,\mathbf{x}) = \Psi(\tau,\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in R^n. \tag{5}$$

(4) はこの計画問題の動的計画方程式とよばれる。(5) はその終端条件である。

条件 (5) のもとで (4) の解となる $V(t,\mathbf{x}) \in C_p^{1,2}(R^{n+1})$ を**古典解**とよぶ[3]。古

2　ここでは伊藤の公式による展開部分で局所マルチンゲールになる項が，実際はマルチンゲールであると仮定している。後退発展作用素が定義される関数空間を限定することによって，この仮定を正当化することができる。詳細は，Flemming and Soner [3]（p.135）参照。
3　$C_p^{1,2}(R^{n+1})$ は多項式成長条件を満足する関数空間である。多項式成長条件については前稿ですでに論じた。

典解は，それにどのような制御が対応しているか，という問題と切り離すことができない。(4) において最大値を与える制御 $\hat{\mathbf{v}}$ は最適制御の「候補」である。実際にそれが最適とよばれるためには，確認すべき条件がある。

まず，確率空間とその上で定義される状態変数や制御に関して，一定の好都合な条件を満たすようなセットを考えて，それを許容可能制御システム $\gamma=(\Omega,\{\mathcal{F}_s\},P,\mathbf{X}(\cdot),\mathbf{u}(\cdot))$ とよぶ[4]。γ は制御 $\mathbf{u}$ のみに関する条件を限定して定まるものではない。状態方程式の動きやそれを観察するコントローラーの情報の蓄積などを総合的に勘案しなければならない。その上で，それらが一定の好ましい条件を満たすように定めた，制御政策の議論のための舞台装置である。

許容可能制御システムの全体の集合を C とおいて，そのなかで

$$V_C(t,\mathbf{x})=\sup_{\gamma\in C}E_{t\mathbf{x}}\left\{\int_t^{\tau}L(s,\mathbf{X}(s),\mathbf{u}(s))ds+\Psi(\tau,\mathbf{X}(\tau))\right\}$$

を考えよう。一定の条件の下で，$V_C(t,\mathbf{x})$ は古典解 $V(t,\mathbf{x})$ に一致することが知られている[5]。その条件とは，

$$\mathbf{u}^*(s)\in\arg\max_{\mathbf{v}}\,[\tilde{A}^{\mathbf{v}}V(s,\mathbf{X}^*(s))+L(s,\mathbf{X}^*(s),\mathbf{v})]$$

がほとんど確実に成り立つようなある許容可能制御システム $\gamma^*=(\Omega^*,\{\mathcal{F}_s^*\},P^*,\mathbf{X}^*,\mathbf{u}^*)$ が存在することである[6]。当然の疑問として，γ^* の存在をどのようにして示すこと

4　システム γ は，具体的には，モデルの舞台となる確率空間 Ω，システムの状態変数 $\mathbf{X}(\cdot)$ や制御 $\mathbf{u}(\cdot)$ が漸進的な可測性をもつようなある情報増大系（σ-集合体の増加列）$\{\mathcal{F}_s\}$，確率測度 P を記述することによって特定される。このほかにも，制御は当然制御空間 $\mathcal{U}$ に属さねばならない。また，ディンキン公式が成り立つための諸条件も満たす必要があろう。許容可能制御に関する詳細は文献［3］の3章を参照のこと。以下の経済学的な議論では，これらの条件の一つ一つに厳密な注意を払うことはしない。

5　このことを述べる定理は確認定理とよばれる。

6　「ほとんど確実」とは，正確に言えば，ルベーグ測度 μ と確率測度 P^* との直積 $\mu\times P^*$ に関して，この条件が成り立たない $(s,\omega)\in[t,\tau]\times\Omega^*$ の測度がゼロということである。

ができるのかが問題となる。それを示さなければ，たとえ古典解に対応する制御 $\hat{\mathbf{v}}$ を求めても，それが許容可能制御システムを構成する制御のなかで最適な選択なのかどうかは必ずしも保証されない。

γ^* の存在は具体的には次のような手続きで論証される。いま (4) の解となる制御が，各 $(t,\mathbf{x})$ に対して，一意に $\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{v}}(t,\mathbf{x})$ と定まるとしよう。この最適制御の候補 $\hat{\mathbf{v}}$ をもとの状態方程式にフィードバックする。すなわち，$\mathbf{X}(t)=\mathbf{x}$ から出発し，制御 $\hat{\mathbf{v}}$ にしたがって動くシステムの軌道を，すべての時間 $s \geq t$ について追跡する。これは確率微分方程式

$$
\begin{aligned}
d\mathbf{X}^*(s) = {} & \mathbf{b}(s,\mathbf{X}^*(s),\hat{\mathbf{v}}(s,\mathbf{X}^*(s)))ds \\
& +\sigma(s,\mathbf{X}^*(s),\hat{\mathbf{v}}(s,\mathbf{X}^*(s)))d\mathbf{w}(s), \quad \mathbf{X}^*(t) = \mathbf{x}
\end{aligned} \tag{6}
$$

であらわされる。あるフィルター付きの確率空間 $(\Omega^*,\{\mathcal{F}^*_s\},P^*)$ が存在して，この微分方程式の解 $\mathbf{X}^*(s)$ がその空間上でマルコフ過程を定めることが示されるとしよう。そこで $\mathbf{u}^*$ を

$$
\mathbf{u}^*(s) = \hat{\mathbf{v}}(s,\mathbf{X}^*(s)), \quad s \geq t
$$

と定義する。最後にこの $\gamma^* = (\Omega^*,\{\mathcal{F}^*_s\},P^*,\mathbf{X}^*,\mathbf{u}^*)$ を対象として，許容可能制御システムの諸条件が満たされているかどうかを確認することになる。そして実際に $\gamma^* \in C$ であることがわかったとき，$\mathbf{u}^*$ を最適マルコフ制御政策という。以下では，最適マルコフ制御政策を単に最適マルコフ制御とよぶことにしよう。

最適制御の要件についての記述が複雑になったが，これは (2) において最適マルコフ制御の候補 $\hat{\mathbf{v}}$ に対応するマルコフ過程 $\mathbf{X}^*(s)$ が定義できないケースが存在するからである。特に，退化したマルコフ拡散過程（$a_{ij}=0$ となる deterministic なケース）においてこの種の困難が生じることが知られている。

抽象的な議論が続いたので，経済モデルの例で最適制御と古典解の具体例をみて

みよう。

1.1. 例1　マートンモデル (1)：ミューチュアルファンド定理

有限視野の最適計画問題の例を示そう。最初は Merton による連続時間におけるポートフォリオ選択定理（ミューチュアルファンド定理）である[7]。

いま時刻 t に富 $\Pi(t)$ をもつ投資家を想定する。この投資家の資産 $i(i=1,...,n)$ への投資の大きさ（=保有株数）を $N_i(t)$ とする。一方，投資家の消費額を $C(t)$ であらわす。資産の価格が確率過程 $P_i(t)$ にしたがうとき，投資家の連続時間での富の制約は $s \geq t$ について

$$d\,\Pi(s) = \sum_{i=1}^{n} N_i(s)dP_i(s) - C(s)ds \tag{7}$$

である。この制約式の左辺は富の変動幅をあらわす。つまり，この式は，資産価格の変動によるキャピタルゲイン $\sum_i N_i(s)dP_i(s)$ から消費相当分 $C(s)ds$ をのぞいた額が実質の富の増減であることを述べている。さらに資産 i の価格変動が

$$dP_i/P_i = \alpha_i ds + \sigma_i dw_i, \quad i = 1, ..., n,$$

であるとしよう。ここで簡単化のために α_i, σ_i は非確率的な定数であるとする。また，n 次元ブラウン運動 $\mathbf{w} = (w_1, ..., w_n)'$ は必ずしも標準型でなく，各成分の相関を $dw_i dw_j = \rho_{ij} ds$ によってあらわす。ρ_{ij} がクロネッカーのデルタ δ_{ij} に等しいときは標準型となる。

i 番目の資産が富全体にしめる比重 $u_i(t) = N_i(t)P_i(t)/\Pi(t)$ を導入すると，富の制約 (7) は以下のようにかき直すことができる：$s \geq t$ について

$$d\Pi(s) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i(s)\Pi(s)ds + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i u_i(s)\Pi(s)dw_i - C(s)ds, \;\; \Pi(t) = \pi. \tag{8}$$

7　Merton [8] 参照。

この書き換えは，式 (7) に価格の変動式 dP_i を代入することによってえられる。投資家の目的は上の制約にしたがいつつ，現時点 t から時刻 τ までにえられる消費の期待効用を最大にするように投資比率 $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), ..., u_n(t))$ と消費の大きさ $C(t)$ をコントロールすることである：

$$\max_{(\mathbf{u}(s), C(s))} E_{t\pi}\left[\int_t^\tau e^{-\beta s} U(C(s))ds + \Psi(\tau, \Pi(\tau))\right]. \tag{9}$$

ここで，$\beta > 0$ は割引率で，$U(\cdot)$ と $\Psi(\cdot, \cdot)$ はそれぞれ投資家の効用関数と遺産関数である。

このモデルで最適な投資比率と消費率の決定（最適制御の選択）は以下のようになされる。最初に，問題をできるだけ簡単化するために，遺産関数はゼロ $\Psi = 0$ と仮定しよう。まず，(9) の最大値を $V(t, \pi)$ とおく：

$$V(t, \pi) = \max_{\mathbf{u}, C} E_{t\pi}\left[\int_t^\tau e^{-\beta s} U(C(s))ds\right].$$

微分方程式 (8) の生成作用素 $\tilde{A}^{\mathbf{v}}$ を計算する。ここで，$\mathbf{v} = (v_1, ..., v_n,\ v_{n+1})'$ であり，この各成分はそれぞれ制御を固定した値 $u_i(s) = v_i (i = 1, ..., n)$，$C(s) = v_{n+1}$ に対応する。(3) をあてはめれば，

$$\tilde{A}^{\mathbf{v}} V(t, \pi) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{n} v_i v_j \sigma_{ij} \pi^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2} + \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \alpha_i \pi - v_{n+1}\right)\frac{\partial V}{\partial \pi}, \quad \sigma_{ij} \equiv \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$

となる。この作用素をもちいれば，DP 方程式 (4) および (5) は，

$$\max_{\mathbf{v} \in \mathcal{U}}\left[\tilde{A}^{\mathbf{v}} V(t, \pi) + e^{-\beta t} U(v_{n+1})\right] = 0, \quad \forall (t, \pi) \in [0, \tau) \times R$$

である。ここで $\mathcal{U}$ は制御空間である。

$\mathcal{U}$ はこれまでは単にコンパクト集合と仮定してきたが，ここではモデルに即した定義が必要である。そのために，制御を二つの部分 $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_{-},\ v_{n+1})'$ に分けて考える。まず，後者は消費であるから，単に $v_{n+1} \geq 0$ とするのが適切であろ

う：$v_{n+1} \in R_+$. ここで R_+ は非負実数の集合である。前者のベクトル $\mathbf{v}_- = (v_1, ..., v_n)'$ は富全体での各資産のウェイトをあらわすので，$\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ である。各成分 v_i は富がマイナスになり得るので，一般には非負ではない。つまり後者は集合 $S_{n-1} = \left\{x = (x_1, ..., x_n) \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\right\}$ に属することになる。以上のように考えれば，制御空間は直積空間 $\mathcal{U} = S_{n-1} \times R_+$ となる。このとき，DP 方程式は

$$\max_{\mathbf{v} \in S_{n-1} \times R_+} \left[e^{-\beta t} U(v_{n+1}) + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i v_j \sigma_{ij} \pi^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2} + \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \alpha_i \pi - v_{n+1} \right) \frac{\partial V}{\partial \pi} \right] = 0 \tag{10}$$

である。

最大化問題 (10) を観察すると，最適解の決定を二つの部分に分けて考えることができることがわかる。すなわち，最適な v_{n+1} の決定とそれ以外のベクトル $\mathbf{v}_-$ の最適値の決定である。まず，最適消費 $\hat{v}_{n+1}$ について考える。効用関数 U は 2 階連続微分可能で $U' > 0$，$U'' < 0$ とする。このとき，最適値 $\hat{v}_{n+1}$ は限界効用 U' の逆関数 $(U')^{-1}$ をもちいて，

$$\hat{v}_{n+1} = (U')^{-1}(e^{\beta t} V_\pi) \tag{11}$$

とあらわされる。ここで $V_\pi \equiv \partial V / \partial \pi$ である。さらに，導関数 $U' > 0$ は R_+ で定義された狭義減少関数であるから，その逆関数 $(U')^{-1}$ もやはり狭義減少関数で，その定義域は R_+ の部分集合である。したがって，(11) の右辺が適切に定義されるためには，任意の (t, π) について $V_\pi(t, \pi) \geq 0$ でなければならないことがわかる。他方，$\mathbf{v}_-$ の最適値は

$$\hat{\mathbf{v}}_- = \frac{V_\pi}{\pi V_{\pi\pi}} \Sigma^{-1} \left\{ \frac{\mathbf{e}' \Sigma^{-1} \alpha}{\mathbf{e}' \Sigma^{-1} \mathbf{e}} \mathbf{e} - \alpha \right\} + \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{e}}{\mathbf{e}' \Sigma^{-1} \mathbf{e}} \tag{12}$$

である。ここで，$\partial^2 V/\partial\pi^2 = V_{\pi\pi}$，$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)'$，$\mathbf{e} = (\overbrace{1, ..., 1}^{n})'$ であり，$\sum^{-1} = [\sigma^{ij}]$ は行列 $\sum = [\sigma_{ij}]$ の逆行列である。

(12) は以下のようにして計算される。$\mathbf{v}_-$ に関する最大化問題は，制約条件 $\mathbf{v}_- \in S_{n+1}$ のもとでの以下の 2 次形式の最大化問題に帰着される：

$$\max_{\mathbf{v}_-}\left\{\frac{1}{2}\pi^2 V_{\pi\pi}\mathbf{v}'_- \sum \mathbf{v}_- + \pi V_\pi \mathbf{v}'_-\alpha\right\} \text{ subject to } \quad \sum_{i=1}^{n} v_i = 1.$$

ここですべての (t, π) に関して $V_{\pi\pi}(t, \pi) < 0$ と仮定しよう。すると，対称行列 Σ のすべての（実）固有値が正であるとき，ラグランジュ乗数法で一意解をもとめることができる。このことを考慮して，$V_{\pi\pi} < 0$ かつ対称行列 Σ は正定値と仮定する。$\mathcal{L}$, λ をそれぞれラグランジュ関数およびラグランジュ乗数とすると，$\partial\mathcal{L}/\partial\mathbf{v}_- = \mathbf{0}'$ より

$$\mathbf{v}_- = -\frac{V_\pi}{\pi V_{\pi\pi}}\sum^{-1}\alpha + \frac{\lambda}{\pi^2 V_{\pi\pi}}\sum^{-1}\mathbf{e}.$$

上式に左からベクトル $\mathbf{e}'$ をかけて $\mathbf{e}'\mathbf{v}_- = 1$ に注意すれば，ラグランジュ乗数 λ について解くことができる：

$$\lambda = \frac{1}{\mathbf{e}'\sum^{-1}\mathbf{e}}(\pi V_\pi \mathbf{e}'\sum^{-1}\alpha + \pi^2 V_{\pi\pi}).$$

この λ を再び上式に代入すれば，最適値 (12) をえる。

(12) における $\mathbf{v}_-$ の表現は，以下のように二つの項に分けて考えると，その幾何学的な意味が明らかになる。まず，

$$M(t, \pi) = \frac{V_\pi(t, \pi)}{\pi V_{\pi\pi}(t, \pi)}, \quad \mathbf{g} = \sum^{-1}\left\{\frac{\mathbf{e}'\sum^{-1}\alpha}{\mathbf{e}'\sum^{-1}\mathbf{e}}\mathbf{e} - \alpha\right\}, \quad \mathbf{h} = \frac{\sum^{-1}\mathbf{e}}{\mathbf{e}'\sum^{-1}\mathbf{e}}$$

とおく。ここで $M = M(t, \pi)$ は富の初期値 (t, π) に依存する（未知の）値であるが，二つのベクトル $\mathbf{h}$ および $\mathbf{g}$ はいずれも富や効用関数（個人的な選好）に

依存しない定数からなるベクトルである。さらに，それらの成分の和は

$$\mathbf{e}'\mathbf{g} = \frac{\mathbf{e}'\sum^{-1}\alpha}{\mathbf{e}'\sum^{-1}\mathbf{e}}\mathbf{e}'\sum^{-1}\mathbf{e} - \mathbf{e}'\sum^{-1}\alpha = 0, \quad \mathbf{e}'\mathbf{h} = \frac{\mathbf{e}'\sum^{-1}\mathbf{e}}{\mathbf{e}'\sum^{-1}\mathbf{e}} = 1$$

である。これらをもちいて，

$$\hat{\mathbf{v}}_- = M(t,\pi)\mathbf{g} + \mathbf{h} \tag{13}$$

とあらわされる。したがって，ベクトル $\mathbf{h}$ に対応する S_{n-1} 上の点を始点として，S_{n-1} の上を，ベクトル $M\mathbf{g}$ でさだまる距離と方向に向かって動く点が，最適な資産配分である。

一般に，直線のパラメータ表示 $t\mathbf{g}+\mathbf{h}(t \in R)$ をかんがえると，これは S_{n-1} 上の点に対応するから，富のある投資配分をあらわす。今そのような投資を二つとり，t の特定の値 $t=t_1, t_2$ であらわそう：$\mathbf{v}_1 = t_1\mathbf{g}+\mathbf{h}$, $\mathbf{v}_2 = t_2\mathbf{g}+\mathbf{h}$. このときの二つのファンド $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ を結合して最適なファンドを実現することができる。実際，その最適な結合率を $\theta \in R$ とおけば，最適結合ファンド $\mathbf{v}(\theta)$ は

$$\mathbf{v}(\theta) \equiv \theta\mathbf{v}_1 + (1-\theta)\mathbf{v}_2 = (\theta t_1 + (1-\theta)t_2)\mathbf{g} + \mathbf{h}$$

とあらわされる。これが実際に最適であるためには，$\mathbf{v}(\theta)$ がその個人の選好や富のレベルに合致しなければならない。すなわち，(13) より $M = \theta t_1 + (1-\theta)t_2$ でなければならない。したがって，$\theta = (M-t_1)/(t_1-t_2)$ と定めればよいことになる。

1.2. 例 2　Merton モデル (2)：値関数の偏微分方程式とその解

上記の例 1 では，最適制御の候補 (12) の特性について考察した。次にこの制御に対応する古典解の決定についてみてみよう。実際のところ，(12) には未知の偏導関数 V_π, $V_{\pi\pi}$ が含まれており，それらがどのように決定されるのかを知らな

ければ $\hat{\mathbf{v}}_-$ についても具体的に知ることはできない。

まず，(11) および (12) を DP 方程式 (10) に代入してすると，

$$\frac{1}{2}\pi^2 V_{\pi\pi}\hat{\mathbf{v}}'_- \sum \hat{\mathbf{v}}_- + \pi V_\pi \hat{\mathbf{v}}'_- \alpha$$
$$= \frac{1}{2}\frac{V_\pi^2}{V_{\pi\pi}}\left(\frac{(\mathbf{e}'\sum^{-1}\alpha)^2}{\mathbf{e}'\sum^{-1}\mathbf{e}} - \alpha'\sum^{-1}\alpha\right) + \frac{1}{2}\frac{\pi^2 V_{\pi\pi}}{\mathbf{e}'\sum^{-1}\mathbf{e}} + \pi V_\pi \frac{\mathbf{e}'\sum^{-1}\alpha}{\mathbf{e}'\sum^{-1}\mathbf{e}}$$

を得る。したがって，DP 方程式 (10) は，

$$0 = e^{-\beta t}U(G) + V_t + V_\pi\left(\pi\frac{\mathbf{e}'\sum^{-1}\alpha}{\mathbf{e}'\sum^{-1}\mathbf{e}} - G\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{V_\pi^2}{V_{\pi\pi}}\left(\frac{(\mathbf{e}'\sum^{-1}\alpha)^2}{\mathbf{e}'\sum^{-1}\mathbf{e}} - \alpha'\sum^{-1}\alpha\right) + \frac{1}{2}\frac{\pi^2 V_{\pi\pi}}{\mathbf{e}'\sum^{-1}\mathbf{e}} \tag{14}$$

と整理される。なおここで，$V_t = \partial V/\partial t,\ G = (U')^{-1}(e^{\beta t}V_\pi)$ とおいている。

方程式 (14) は定義域 $(t, \pi) \in [0, \tau) \times R$ をもつ 2 階非線型偏微分方程式である。終端条件として，たとえばある所与の関数 L に対して

$$V(\tau, \pi) = L(\pi),\ \pi \in R \tag{15}$$

を課するなら，いわゆるコーシー問題が得られる。Merton [8] では，危険資産と確定利付き資産の 2 種類の資産選択のケースについて，(14) の解を考察している。ここでは，このままの状態で，すなわち危険資産が n 種類存在する状態で，この偏微分方程式を解くことを考えよう。放物型の 2 階偏微分方程式の解法には Feynman-Kac による公式が有力であるが，この方程式は非線型であるので，そのままでは適用できない[8]。

そこで，別の方法を試みよう。まず効用関数を特定する必要がある。以下では，効用関数を $U(c) = \ln c$ とおく。これは条件 $U' > 0,\ U'' < 0$ をみたす。そして，

8 Karatzas and Shreve [5], Theorem 7.6, p.366, 参照。

解の形を

$$V(t,\pi) = e^{-\beta t} f(t) \ln \pi + g(h) \tag{16}$$

とおく[9]。ここで $f(t)$，$g(t)$ は決定されるべき滑らかな関数である。特に，$f(t)>0$ であれば，値関数についてこれまで前提してきた条件 $V_\pi > 0$，$V_{\pi\pi} < 0$ が自動的に満たされることにも注意する。

$(U')^{-1}(z) = 1/z$ であるから，(16) を (14) に代入して計算すれば，

$$\begin{aligned}&\{2r_{ee}(-f'(t)+\beta f(t)-1)\}\ln \pi\\ &=-f(t)-2r_{ee}-2r_{ee}\ln f(t)+2r_{e\alpha}f(t)+(r_{e\alpha})^2 f(t)-r_{ee}r_{\alpha\alpha}f(t)+2r_{ee}e^{t\beta}g'(t)\end{aligned}$$

をえる。ここで

$$r_{ee} = \mathbf{e}' \textstyle\sum^{-1} \mathbf{e}, \quad r_{e\alpha} = \mathbf{e}' \textstyle\sum^{-1} \alpha, \quad r_{\alpha\alpha} = \alpha' \textstyle\sum^{-1} \alpha$$

とおいている。上の関係式が任意の $\pi > 0$ に対して成り立つためには，

$$\begin{aligned}&0=-f'(t)+\beta f(t)-1,\\ &0=-f(t)-2r_{ee}-2r_{ee}\ln f(t)+2r_{e\alpha}f(t)+(r_{e\alpha})^2 f(t)-r_{ee}r_{\alpha\alpha}f(t)+2r_{ee}e^{t\beta}g'(t)\end{aligned}$$

でなければならない。$f(t)$ に関する最初の微分方程式より

$$f(t) = K_0 e^{t\beta} + \frac{1}{\beta}, \tag{17}$$

をえる。K_0 は任意の定数であるが，上で述べたように $V_\pi > 0$，$V_{\pi\pi} < 0$ のためには，$K_0 > 0$ でなければならない。$f(t)$ を $g(t)$ についての第 2 の微分方程式に代

9　このように，まず解の形を定めてから具体的な関数を確定するアプローチは，より単純なケースについて Merton [7] で，またかなり一般的なケースについて Huang *et al.* [4] でもなされている。

入して解けば,

$$g(t)=K_1+\frac{e^{-t\beta}}{2r_{ee}\beta^2}\left\{-1-2r_{ee}\beta-2r_{ee}\beta\ln\left(\frac{1}{\beta}+K_0e^{t\beta}\right)+2r_{e\alpha}+(r_{e\alpha})^2-r_{ee}r_{\alpha\alpha}\right\}$$
$$+\frac{K_0}{2r_{ee}}\{t-2r_{ee}\ln(e^{-t\beta}+K_0\beta)-2tr_{e\alpha}-t(r_{e\alpha})^2+tr_{ee}r_{\alpha\alpha}\} \qquad (18)$$

である。K_1 も同じく任意定数で, K_0 とともに V の境界条件よって定まることになる。これで解が (16) の形で求められた。

上でみたように (14) の解はかなり複雑になる。いくつかの簡単化の仮定を追加して, 方程式 (14) をよりみやすい形に変えてみよう。具体的には, すべての資産についてその期待成長率が 1 で同一であるとする。これは $\alpha_i=1(i=1,...,n)$ とおくことによって表現できる。この仮定の下では, $\mathbf{e}=\alpha$ であるから (14) の右辺の第 4 項は 0 となる。したがって, (14) は

$$0=V_t+\frac{1}{2}(\mathbf{e}'\Sigma^{-1}\mathbf{e})^{-1}\pi^2V_{\pi\pi}+\pi V_\pi-e^{-\beta t}(\ln V_\pi+\beta t+1) \qquad (19)$$

と簡単化される。このとき, 最適なマルコフ制御の候補 (12) は定数ベクトル

$$\hat{\mathbf{v}}_{-}=\frac{\Sigma^{-1}\mathbf{e}}{\mathbf{e}'\Sigma^{-1}\mathbf{e}} \qquad (20)$$

となる。また, (19) をみたす $V(t,\pi)=e^{-\beta t}f(t)+g(t)$ をもとめると, $f(t)$ は (17) のままであるが, $g(t)$ は (18) の定数項 $r_{\alpha e}$, $r_{\alpha\alpha}$ をすべて r_{ee} で置き換えた形となる。図 1 は, $\alpha=\mathbf{e}$ と単純化されたモデルについて, パラメータの値を特定して描いた値関数 $V(t,\pi)$ のグラフである。そこでは, $r_{ee}=r_{\alpha\alpha}=r_{\alpha e}=10$, $\beta=0.4$, $K_0=K_1=1$ とおいている[10]。

最後に最適マルコフ制御の候補 (20) が実際に最適であることを確かめる作業

---

10 K_0, K_1 はそもそも値関数の終端条件から決定されるべき値であるが, ここではその条件を明示していないので, 単に 1 とおいている。

が残されている。これは (20) のもとでの後退発展作用素 $A^{\hat{v}-}$ が実際にマルコフ過程を生成することの確認である。

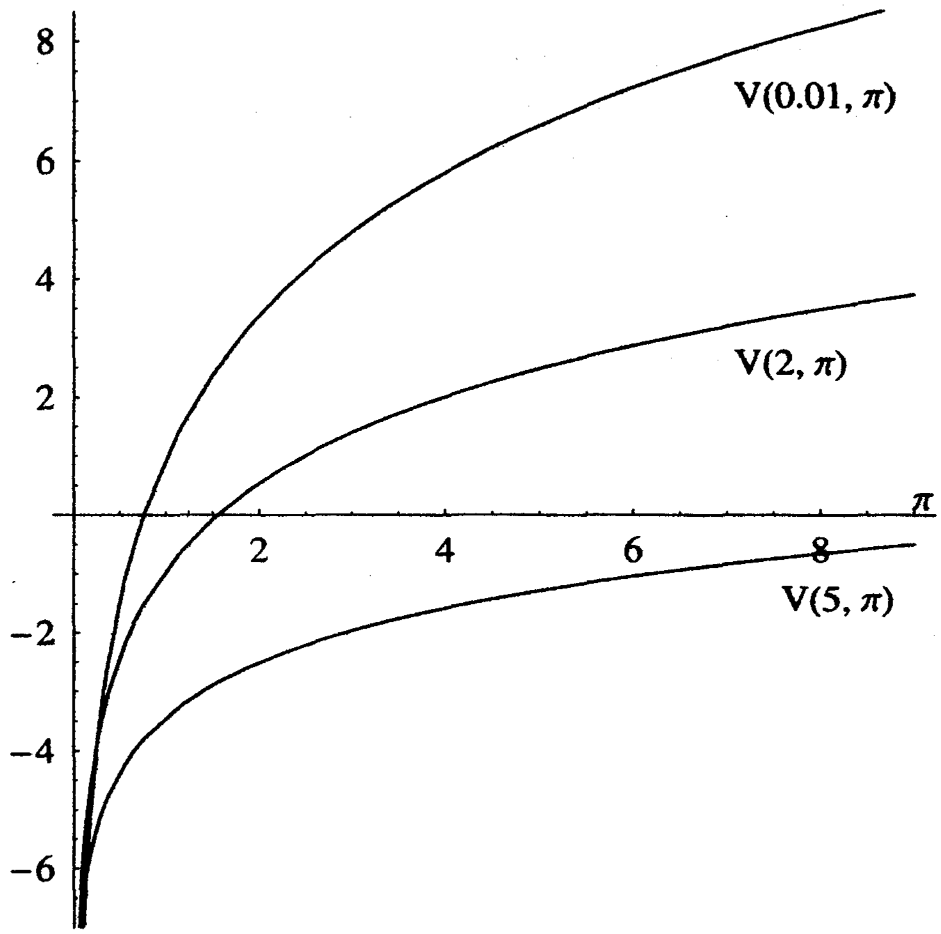

図1　単純化された資産選択モデルの値関数 $V(t, \pi)$: $r_{ee}=r_{\alpha\alpha}=r_{\alpha e}=10$, $\beta=0.4$, $K_0=K_1=1$

参考文献

[1] Asmar, N. H. (2000): *Partial Differential Equations and Boundary Value Problems*, Prentice Hall.

[2] Ethier, S. N. and T. G. Kurtz (1986): *Markov Processes: Characterization and Convergence*, Wiley.

[3] Flemming, W. H. and H. M. Soner (1993): *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, Springer.

[4] Huang, C., Taksar, M., and S. H. Zhu (1999): "A Verification Theorem in General Equilibrium Model of Asset Prices," in *Stochastic Analysis, Control, Optimization and Applications*, W. M. McEneaney *et al.* (eds.), Birkhäuser, pp.585-604.

[5] Karatzas, I. and S. E. Shreve (1991): *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2nd ed., Springer.

[6] Korn, R. (1997): *Optimal Portfolios: Stochastic Models for Optimal Investment and Risk Management in Continuous Time*, World Scientific.

[7] Merton, R. C. (1969): "Lifetime Portfolio Selection Under Uncertainty: The Continuous-Time Case," *Review of Economics and Statistics*, vol.51, pp.247-257.

[8] Merton, R. C. (1971): "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model," *Journal of Economic Theory*, vol.3, pp.373-413.