

— 目次 —

はじめに

第 1 章 リスクとリスク管理

- 1. 1 Markowitz の慧眼
- 1. 2 リスク指標 VaR
- 1. 3 本論で用いるデータについて
- 1. 4 変動率の時系列特性 …… 株価変動は iid か
- 1. 5 Fat tail
- 1. 6 中心極限定理頼みの VaR
- 1. 7 脈動する Volatility

補足 オプションプレミアムのスマイルカーブ

第 2 章 ひたすらに精緻化された volatility clustering 研究

- 2. 1 経緯
- 2. 2 ARCH、GARCH 分析
- 2. 3 何が分かったのか

第 3 章 自己相関係数と緩和過程

- 3. 1 緩和する自己相関係数
- 3. 2 1 次の緩和過程の自己相関係数
- 3. 3 先行研究で自己相関係数が閑却された背景

第 4 章 Dow とその他の金融指数の volatility clustering の比較

- 4. 1 データについて
- 4. 2 回帰係数の有意差の検証 …… 共分散分析
- 4. 3 Dow と各国株価指数の volatility clustering
- 4. 4 自己相関係数を求める VB プログラム

第 5 章 相互相関係数で検証する volatility clustering のグローバル性

- 5. 1 相互相関係数について
- 5. 2 Dow と各指標の日次変動率の相互相関係数
- 5. 3 Dow と各指標の日次変動率絶対値の相互相関係数
- 5. 4 相互相関係数を求める VB プログラム

第 6 章 Volatility clustering とシステムティックリスク

- 6. 1 定常とはほど遠い volatility 変化
- 6. 2 システムティックリスクと個別リスク

第 7 章 結論

おわりに

参考文献

謝辭

## はじめに

2000年代初め、日本では会計ビッグバンと呼ばれる会計基準の改訂が実施された。これは、金融市場がグローバル化していく中で、それまでローカルルールに従っていた財務会計を国際基準に合わせるべしという市場の要請に応えたものであった。このルール変更の一つに投資有価証券の時価評価がある。戦後の日本では、資本市場が貧弱であったこともあって、株式持合いという慣習が広がった。会社と取引銀行、取引企業などが互いに安定株主として株式を持ち合うもので、経済が好調な時代にあっては win-win の関係にあったといえるかもしれない。これらの株式について、改訂前のルールでは取得原価で資産に計上しておけばよかったものが、改訂後は決算時期の時価による評価に変更された。たとえば、西日本鉄道の 2018 年度の有価証券報告書[1]には、資産総額 6,227 億円の中に投資有価証券 517 億円が記載され、連結包括利益計算書には「その他有価証券評価差額金」としてマイナス 29 億円が計上されている。西鉄の税引き後純利益は 68 億円であるから、この評価損は決して小さい金額ではない。

このように財務会計の世界では、保有する金融資産についてのリスク評価とリスク管理がより重要な業務となっている。リスク評価の方法としては、過去の資産価格変動、いわゆるボラティリティ（以下、volatility と記す）に基づいて算出したバリュウ・アット・リスク（同じく VaR）が広く用いられている。

また、株式投資の世界では、ポートフォリオ理論として知られる期待 volatility を最小とする分散投資理論が普及しており、volatility や銘柄間の相関係数などについて定常性を仮定した最適化理論が構築されている。

さらに、リスクヘッジの有力なアイテムであるオプションの理論でも、定常性と正規性を仮定した精緻な理論が組み立てられ、広く利用されている。しかしながら、株価などの変動が定常性を満たさず、正規性も成り立たないことはすでに古くから知られていた。本論文の研究対象である volatility clustering（株価の変動が激しいときはしばらく激しく、穏やかなときはしばらく穏やかな状態が続くという脈動性）については、すでに 1963 年に Mandelbrot によって報告されている[2]。VaR もポートフォリオ理論も、さらにオプション理論さえも、当初から正当性に危うさを内包していたといえる。

もちろん、これまでさまざまな改善なり修正が試みられてきたが[3~5]、実務の現場で必要とされるノウハウだけに、VaR に代わる使い勝手の良い理論はまだ登場していない。さらに、volatility clustering に関して、それがどのようなメカニズムで生み出された現象かについても解明されたとはいいい難い状況にある。現在、volatility clustering の研究は GARCH (Generalized Auto-Regressive Conditional Heteroscedasticity) 系の分析に集中

しており、さまざまな時系列モデルが考案される一方で、メカニズムの解明は脇に置かれている印象がある。たとえば、GARCH モデルと同じと見なされている SV (Stochastic Volatility) 理論では「volatility  $\sigma_t^2$  が 1 次の AR 過程に従う」としてモデルを同定するが [6]、それはまさに Mandelbrot の知見のもっとも単純な数学的表現にほかならず、「volatility clustering はどのように生み出されるのか」について具体的な情報を与えるものではない。

おそらく、よりリアリティあるリスク評価を実現するには、定常性と正規性を前提とした VaR 理論の根本的な修正が欠かせないが、どう修正するかを考えると、「なぜ定常性と正規性が成り立たないのか」に関する情報が不可欠なはずであり、その先にメカニズムの解明があるように思われる。

本研究は、このような視点から、「volatility clustering とはどのような現象であるのか」を基本に立ち返って明らかにすることを目的としている。1 次の緩和過程として見た Volatility clustering 研究については、世界の主要な株式市場や債券市場に存在する共通の緩和過程の存在をすでに原田が指摘している [7]。そこで、本研究では相互相関係数を用いて、各市場間の volatility の時間相関の定量的検証を行い、欧米の金融市場に広く存在する共通の緩和特性を見出した。これは、volatility clustering がローカルな金融市場に特有な現象というより、グローバルな状況から生まれた特性であることを示す明確かつ新たな証拠と考える。

本論分の構成は次の通りである第 1 章ではリスクに関する基本的な考え方を総括し、定常性と正規性がどのように正当化されているかを確認している。第 2 章では、今日の主流となっている GARCH 系の研究について整理している。第 3 章では、自己相関係数に対して、これまでの研究では閑却されてきた統計的な推定と検定によって各国の株価指数の実証的分析を行っている。第 4 章では各国の株価指数やその他の金融指標について相互相関係数による分析を行い、volatility clustering のグローバル性を検証している。最後に、第 5 章で、本研究のまとめを行い、分析結果の意義を論じている。

# 第1章 リスクとリスク管理

## 1.1 Markowitzの慧眼

確率変数  $X$  が平均  $\mu$ 、標準偏差  $\sigma$  の正規分布に従うとする。このとき、平均  $\mu$  が同じであるなら、 $X$  がマイナスの値をとる確率は  $\sigma$  が大きいほど大きくなる。図 1.1 はいくつかの  $\mu$ 、 $\sigma$  について確率を示している。

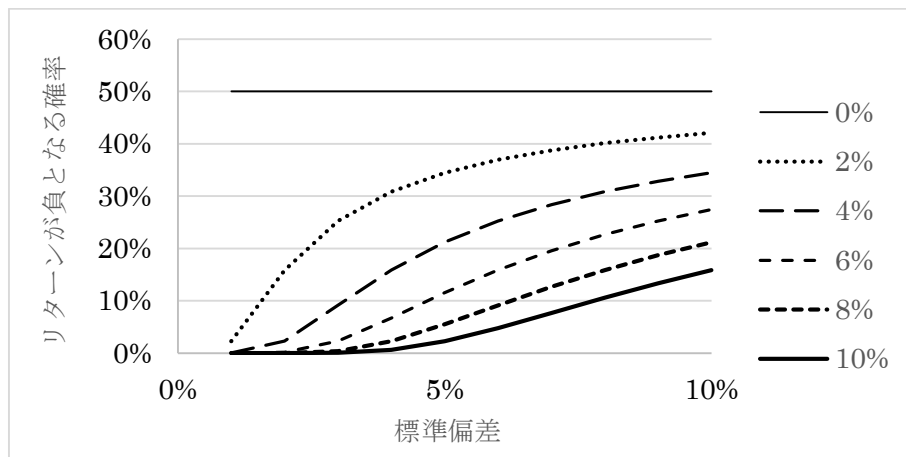


図 1.1 いくつかの  $\mu$  に対する  $\sigma$  と正規分布  $N(\mu, \sigma^2)$  がマイナスをとる確率

Markowitz[8]は、このきわめて単純な事実を株式投資の世界に当てはめ、「リスク (= 損をする確率) は株価変動率の分散あるいは標準偏差に依存する」というアイデアを引き出し、そこから、今日の投資理論の根幹をなす分散投資理論を築き上げた。

いま、A と B という 2 つの株式銘柄のリターン  $R_A$  と  $R_B$  がそれぞれ平均  $\mu_A, \mu_B$ 、標準偏差  $\sigma_A, \sigma_B$  の確率分布に従うとする。このとき、この 2 つの銘柄を  $t: 1-t$  の比率で組み合わせたポートフォリオの期待リターン  $M(t)$  と分散  $V(t)$  は次の式で与えられる。

$$(1.1) \quad M(t) = t\mu_A + (1-t)\mu_B$$

$$(1.2) \quad V(t) = t^2\sigma_A^2 + 2t(1-t)\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B + (1-t)^2\sigma_B^2$$

ここで、 $\rho_{AB}$  は相関係数である。両式から  $t$  を消去すると、 $V(t)$  は  $M(t)$  の 2 次関数となり、横軸に  $V$ 、縦軸に  $M$  をとると、各  $t$  に対して横向きの放物線が描かれる。例として、図 1.2 は、ローリスク・ローリターン銘柄 A ( $\mu_A=4\%$ ,  $\sigma_A=6\%$ )、ハイリスク・ハイリターン銘柄 B ( $\mu_B=8\%$ ,  $\sigma_B=16\%$ ) を組み合わせたときの  $V$  と  $M$  の関係を、いくつかの  $\rho_{AB}$  につ

いて示している。相関係数 $\rho_{AB}$ が0に近いかマイナスのときに、リターンを下げず、リスクだけを下げることが存在しており、これがポートフォリオ理論とも呼ばれる分散投資理論の中核をなしている。相関0を考えると、これは大数の法則にほかならず、要は、無関係な変動は重ね合わせれば均されることに拠っている。

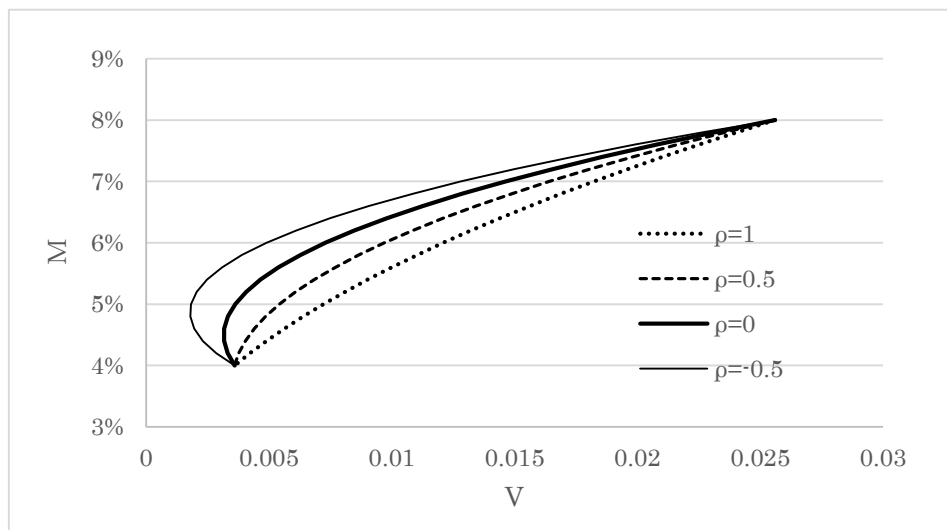


図 1.2 銘柄 A ( $\mu_A=4\%$ ,  $\sigma_A=6\%$ ) と銘柄 B ( $\mu_B=8\%$ ,  $\sigma_B=16\%$ ) のポートフォリオのいくつかの $\rho_{AB}$ に対するリスク・リターン曲線

2 銘柄より多い、たとえば  $p$  銘柄を組み合わせたときの分散  $v$  は、組成を横ベクトル  $w$ 、分散共分散行列を  $V$  としたとき、

$$(1.3) \quad v = WW^t$$

で与えられる。その意味するところは式(1.2)と変わらない。

以上、ポートフォリオ理論の骨子だけを示したが、投資理論の中核的地位を占めているだけに、さまざまな精緻化が進められている[9]。ここでその詳細には踏み込まないが、次の点だけ確認しておきたい。

1 点目は、分散投資で抑制できるのは個々の銘柄に含まれる個別のリスクだけであり、共通するシステムティックリスク（以下、systematic risk）は影響を受けないという点である。そして、volatility clustering は systematic risk が示す特性であり、リスクを抑制すべく組成されたポートフォリオほど volatility clustering の影響を大きく受けることになる。この問題については、後章で改めて論じる。

## 1. 2 リスク指標 VaR

日本における会計ビッグバンと投資金融資産の時価評価についてはすでに触れたが、こ

れに関連して具体例を挙げると、2019年3月時点で日本の国内銀行は資産として23.5兆円の株式を保有している[10]。かりに、これが10%下落すれば2兆円余りの評価損が発生する。実際に全銀協は2018年度の全国銀行の決算について、「経常利益は、上記(2)の実質業務純益の減益に加えて、個別貸倒引当金繰入額の大幅な増加と貸倒引当金戻入益の大幅な減少、および株式等関係損益の減少等から、3兆2,914億円(前年度比7,570億円、18.7%減)の減益となった」と記載しており[11]、金融資産を保有する企業にとって、そのリスクの評価と管理の重要性は格段に増している。

では、期首時点である企業が時価100億円の他社株式を投資資産として所有しているとき、可能性として、期末にどれほどの評価損を想定しておかなければならないのか。このとき一般に用いられる指標がVaRであり、以下、簡単に概要を示す。

評価額がS円の資産について、T年後の変動率 $r$ を考える。当然、 $r$ は不明であり、それゆえ中立的な仮定として、

$$(1.4) \quad E(r) = 0$$

と仮定する。ここで、 $E(\cdot)$ は期待値を指す。

しかしながら、現実の $r$ は状況に応じて上下する。そこで、同じく中立的な仮定として「これからT年間の資産価格の変動の激しさは、これまで1年間と変わらない」を置く。これによって、これからの変動の大きさは過去1年間の変動率の分散(標準偏差)、いわゆるhistorical volatilityによって評価できる。

さらに、 $n$ 年後の変動率 $r$ について正規分布が仮定できるなら、T年後の資産価格の確率分布が与えられ、これから「確率\*\*%で資産評価額は\*\*円以上」などを導くことが可能となる。一般には想定する範囲として99%が採用され、最悪の水準として1%値が用いられる。たとえばT年後の $r$ の標準偏差を15%とするなら、1%値は-34.9%であり、評価額が100億円であるなら、「T年後の最悪の評価損は1%水準で34.9億円と推定される」ということになる。これが99%VaRであり、直観的に分かりやすい指標として広く受け入れられている。

ただし、VaRの妥当性について、検証しなければならないポイントは少なくない。大きい問題点として、次の2点を挙げる必要がある。

- ① Historical volatility を用いることの妥当性(分散の定常性)
- ② 変動率 $r$ の正規性

①こそ、本研究の主題であり、1.7節と次章以降で詳説する。ここでは②について、節を改めて概説する。

### 1. 3 本論で用いるデータについて

本論では次のデータを用いている。

#### ●アメリカ金融市場

- ダウ平均日次終値（以下，Dow）
  - S&P500 日次終値（同じく，SP500）
  - Dow 構成銘柄のうち 1981 年以降のデータが Yahoo Finance に公表されている次の 21 社の日次終値
    - ◇ American Express Company（以下，AXP）
    - ◇ The Boeing Company（BA）
    - ◇ Caterpillar Inc.（CAT）
    - ◇ Chevron Corporation（CVX），
    - ◇ The Walt Disney Company（Dis）
    - ◇ International Business Machines Corporation（IBM）
    - ◇ Intel Corporation（INTC）
    - ◇ Johnson & Johnson（JNJ）
    - ◇ JPMorgan Chase & Co.（JPM）
    - ◇ The Coca-Cola Company（KO）
    - ◇ McDonald's Corporation（MCD）
    - ◇ 3M Company（MMM）
    - ◇ Merck & Co., Inc.（MRK）
    - ◇ NIKE, Inc.（NKE）
    - ◇ Pfizer Inc.（PFE）
    - ◇ The Procter & Gamble Company（PG）
    - ◇ The Travelers Companies, Inc.（TRV）
    - ◇ United Technologies Corporation（UTX）
    - ◇ Walgreens Boots Alliance, Inc.（WBA）
    - ◇ Walmart Inc.（WMT）
    - ◇ Exxon Mobil Corporation（XOM）
- （以上，Yahoo Finance[12]より取得）
- 10 年国債金利日次終値（以下，Y10）
  - 次の為替レート日次データ
    - ◇ ユーロドル（USD/EUR）
    - ◇ ポンドドル（USD/GBP）
    - ◇ ドル円（JPY/USD）



(以上, FRB のウェブサイト[13]より取得)

●主要国の株価指数

- イギリス FTSE100 (FTSE)
- ドイツ DAX30 (DAX)
- フランス CAC40 (CAC)
- 香港ハンセン指数 (HSI)
- 日本日経平均 (N225)

(以上, 各国の Yahoo Finance などから取得)

## 1. 4 変動率の時系列特性 …… 株価変動は iid か

前日および当日の資産価格をそれぞれ  $x_{t-1}$ ,  $x_t$  としたとき, 日次変動率  $r_t$  として一般に次の式が用いられる。

$$(1.5) \quad r_t = \log_e \frac{x_t}{x_{t-1}}$$

したがって, ある時点から  $T$  年後までの変動率を  $R_T$ , 毎日の株価を  $x_0, x_1, \dots, x_n$  とすると,

$$(1.6) \quad R_T = \log_e \frac{x_n}{x_0} = \log_e \frac{x_1}{x_0} + \log_e \frac{x_2}{x_1} + \dots + \log_e \frac{x_n}{x_{n-1}} = \sum_t r_t$$

であり, 「 $T$  年間の変動率 =  $T$  年間の毎日の変動率の合計」が成り立つ。そして, 時系列  $r_t$  が iid (independent and identically distributed, ここでは独立同一分布と呼ぶ) であるなら,  $R_T$  に対して中心極限定理が期待できることになる。

独立同一分布 (iid) 過程については, 一般に 2 つの特性が要求される。

- (1) 定常性<sup>1</sup> (平均, 分散が時間に依存せず一定)
- (2) 各要素は互いに独立

要件 (1) は, 前節で取り上げた①ヒストリカル・ボラティリティの妥当性に直結する問題であり, 既述したように, 先で詳述する。

要件 (2) は「いかなる時間間隔の組み合わせでもデータは相関しない」ということにほかならず, 言い換えると「自己相関係数は Dirac のデルタ関数に等しい」となる。ここで, 自己相関係数  $C(s)$  は次の式で定義され, 「自身と  $s$  だけ時間が経過した自身との相関」に相当する。

---

<sup>1</sup> 定常性については, 平均と分散が一定とする弱定常と, 3 次以上のモーメントまで一定であることを要求する強定常性があるが, ここでは弱定常を想定している。

$$(1.7) \quad C(s) = \frac{\sum(r_t - \bar{r})(r_{t+s} - \bar{r})}{(n-s)V}$$

ここで、 $\bar{r}$ と $V$ はそれぞれ平均と分散である。また、Dirac のデルタ関数とは、次のような関数を指している。

$$(1.8) \quad C(s) = \begin{cases} 1 & (s=0) \\ 0 & (s \neq 0) \end{cases}$$

つまり、ある時点と別の時点の値はまったく相関しないということであり、「各要素は互いに独立」そのままを意味する。

以下、実際の株価変動について、具体例として Dow と、構成銘柄のうちアルファベット順のトップ 4 社 (AXP, BA, CAT, CVX) を取り上げてみる。

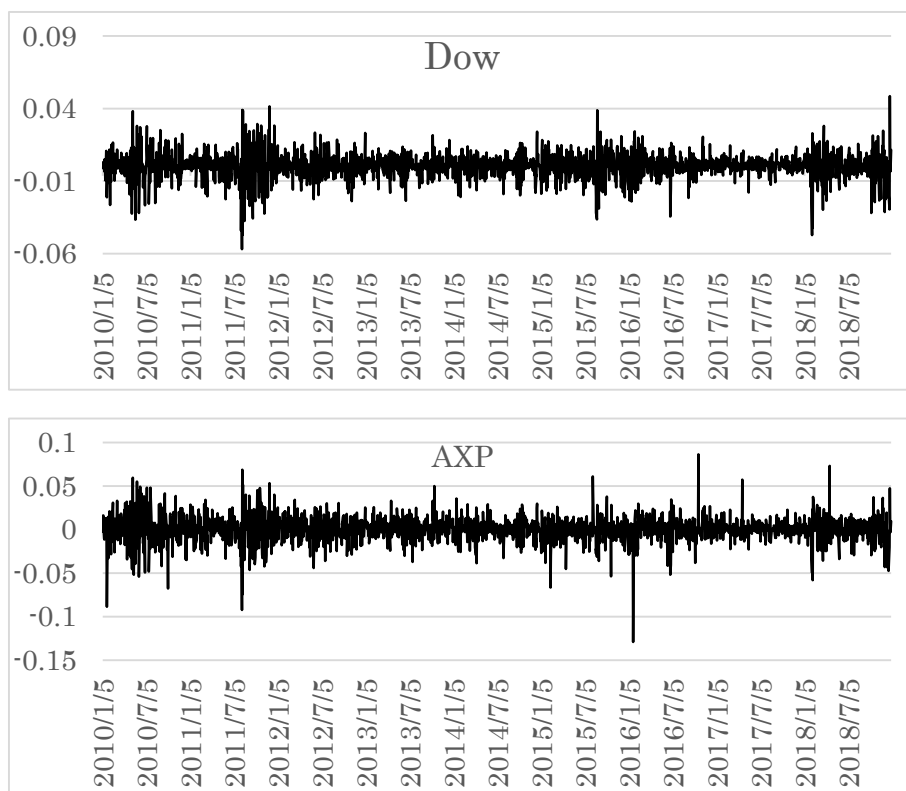


図 1.3 2010/1/5～2018/12/31 における Dow および AXP の日次変動率

図 1.3 は 2010 年 1 月 5 日以降の Dow と AXP の日次変動率である。BA, CAT, CVX もほぼ同じようなパターンを示す。図 1.4 はそれぞれの日次変動率の自己相関係数を示している。明らかにラグ 0 以外の値はほぼ 0 に近く、Dirac のデルタ関数と見なしてよいと考えられる。

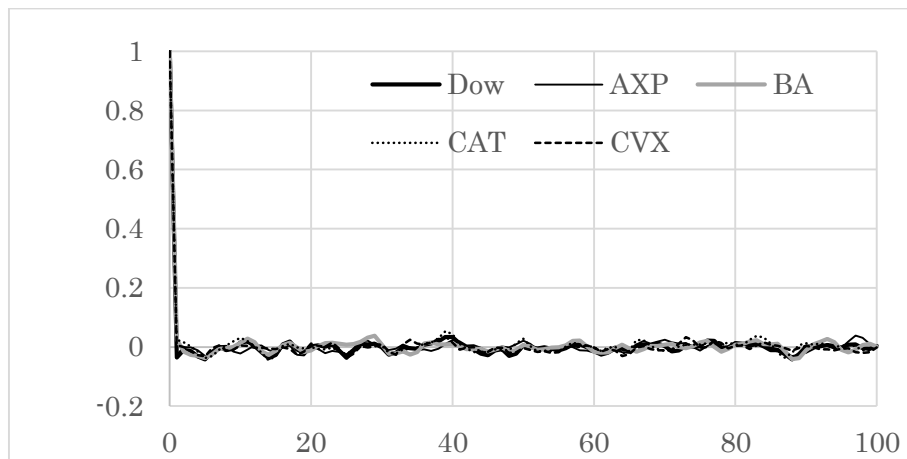


図 1.4 2010/1/5～2018/12/31 の Dow, AXP, BA, CAT および CVX 日次変動率の自己相関係数

なお、自己相関係数の有意性検定については Ljung-Box 統計量が知られている[14]。これに従って図 1.4 の結果を検定した結果は、すべて「Dirac のデルタ関数は棄却されない」であった。ただし、既述した (1) の問題から、この結果については十分な留意が必要と思われる。

図 1.5 は同じく 2010 年から 2018 年までの CAC, DAX, HIS および N225 の日次変動率から求めた自己相関係数である。ここでも Dirac のデルタ関数は棄却されない。

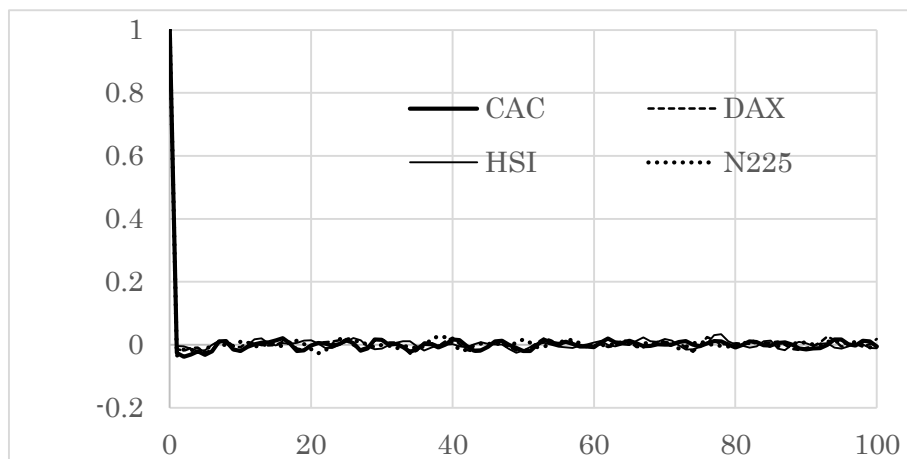


図 1.5 2010～2018 年における CAC, DAX, HIS および N225 の日次変動率の自己相関係数

図 1.6 は、SP500 について、1960 年からそれぞれ 10 年の日次変動率から求めた自己相関係数である。ここでも際立った特性は認められない。

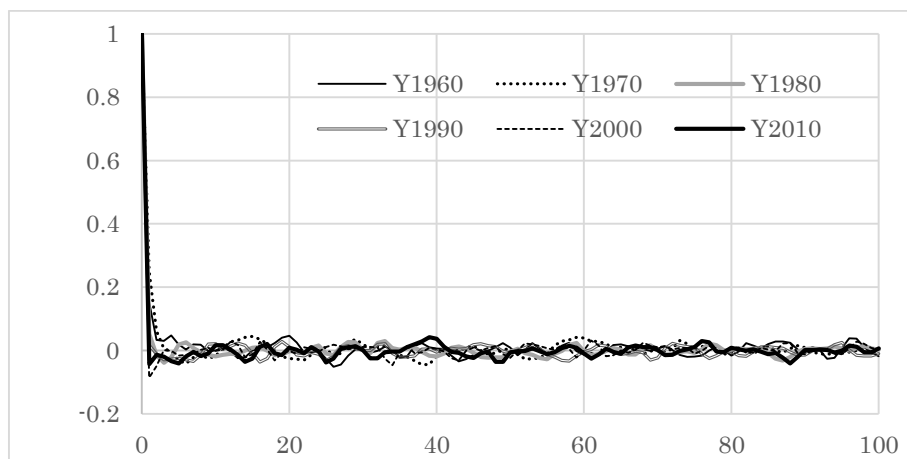


図 1.6 SP500 について，1960 年以降の各 10 年間の日次変動率から求めた自己相関係数

図 1.7 は，2010～2018 年における 10 年債券金利 Y10，および 3 つの為替レートの日次変動率から求めた自己相関係数であり，ここでも Dirac のデルタ関数が得られる。

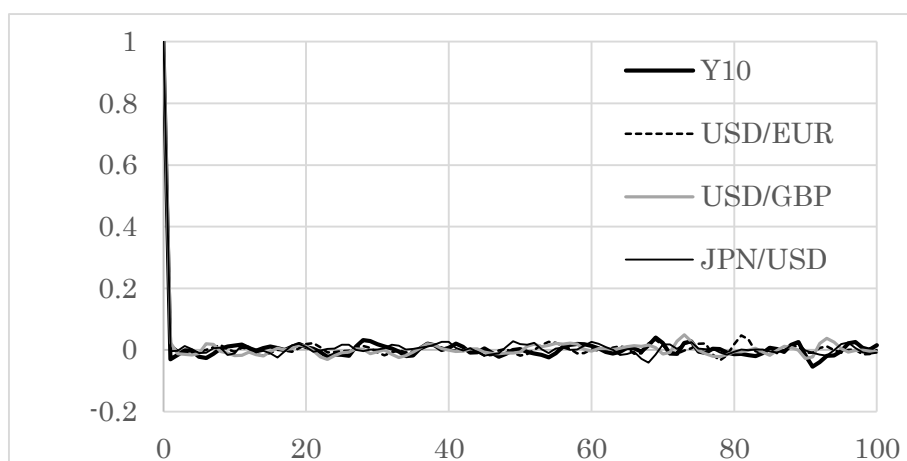


図 1.7 2010～2018 年における Y10，USD/EUR，USD/GBP および JPN/USD の日次変動率の自己相関係数

以上のように，日次データに関する限り，株価や金利，為替レートの変動率の自己相関係数は Dirac のデルタ関数で近似され，この限りで「互いに独立」であり，いかなる規則性も示していない。

## 1. 5 Fat tail

標準偏差を  $\sigma$  としたとき，社会科学や心理学，医学などの分野では，一般に  $\pm 2\sigma$  の範囲を正常域とする。正規分布であれば 95% の範囲であり，逆にいえば，人には 5% くらいの異常なケースがあることが前提されている。品質管理の世界では，5% もの不良品は論外で

あるから、 $\pm 3\sigma$ の99.7%が管理限界とされる。

このいずれも正規分布を想定しており、 $\pm 2\sigma$ あるいは $\pm 3\sigma$ を取れば、ほぼ対象の大半を捕捉できるとの暗黙の合意が背景にある。しかしながら、さまざまな分野で、多様な例外が案外の頻度で登場することも体感として経験される。たとえば、植田康孝「AKB48 選抜総選挙におけるロングテール構造とメディア選択」[15]では、下位のメンバーでもそれなりの得票が集まり、正規分布が想定する「出現確率は偏差の2乗に逆比例する」よりはるかに緩やかな落ち方であることが指摘されている。

図 1.8 は、10 年ごとに求めた SP 日次変動率の分布であり、縦軸は対数目盛であるから、正規分布に従うのであれば、上に凸な放物線を描かなければならない。しかし、いずれも区間でも放物線というよりは三角形に近く、正規分布とはいえないように思われる。

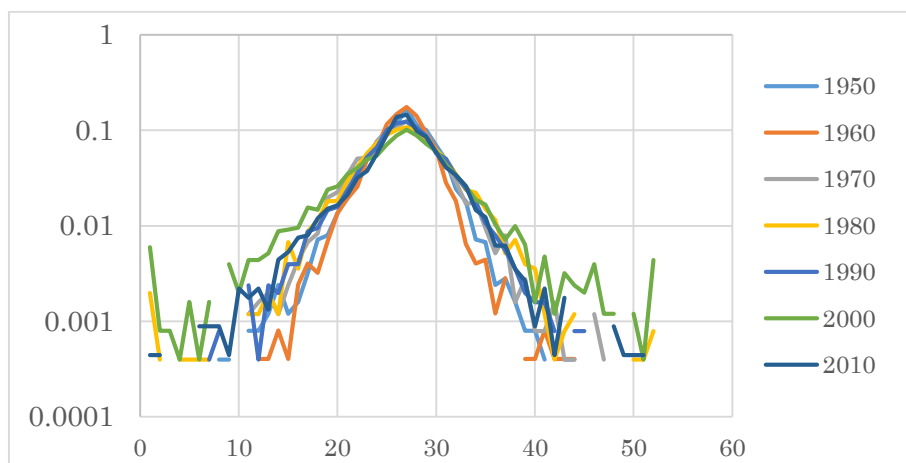


図 1.8 10 年ごとに求めた SP 日次変動率の分布

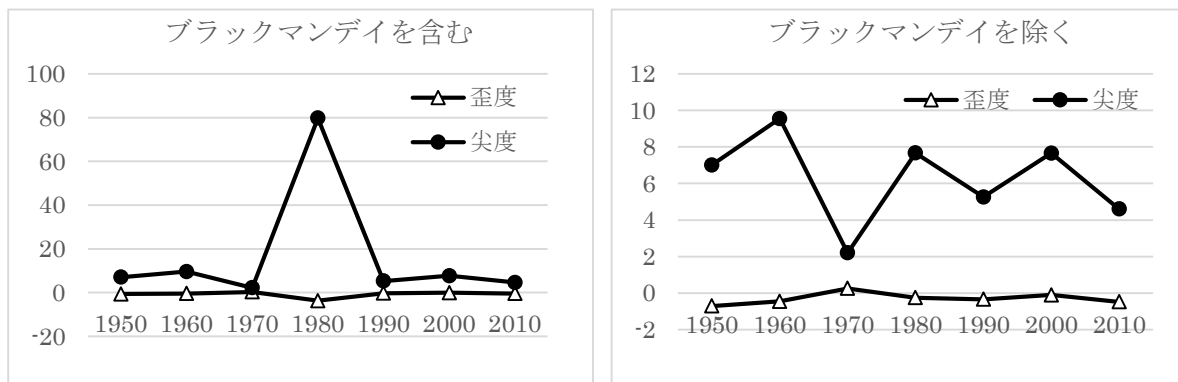


図 1.9 10 年ごとに求めた SP 日次変動率の尖度と歪度

図 1.9 は、同じく SP 日次変動率について 10 年ごとに求めた尖度と歪度である。左図では 1980~1989 年の尖度が突出している。これは、1987 年 10 月 19 日のブラックマンデーにおける 22.9%という極端な暴落の影響であり、これを除外した右図では、歪度はほぼ 0 付近を推移し、尖度は 2~10 の範囲で動いている。正規分布であればいずれも 0 である

から、明らかに尖度が高い。

このように株価変動の尖度が大きいことはすでに古くから知られており、fat tail と呼ばれてきた。商品価格の変動が fat tail を示すことも古くから知られており、たとえば Mandelbrot[2]はすでに 1963 年にウール価格の変動の fat tail を報告している。

したがって、株価の日次変動率については次のことがいえる。

- ①' 規則性を示さない
- ②' Fat tail を示して、正規分布とはいえない

## 1. 6 中心極限定理頼みの VaR

前節で示したように、株価の日次変動率は正規分布とはならない。すなわち、1.2 節で求められた「変動率の正規性」は、日次のレベルでは成立しない。しかし、保有資産のリスク評価という場合は、1 年とか四半期での変動率が問題となる。ここで 1.4 節の

$$(1.6) \quad R_T = \log_e \frac{x_n}{x_0} = \log_e \frac{x_1}{x_0} + \log_e \frac{x_2}{x_1} + \cdots + \log_e \frac{x_n}{x_{n-1}} = \sum_t r_t$$

を振り返ると、 $T$ 年の変動率は、そこに含まれる日数分の日次変動率の和に等しい。1 年であれば 240 日、四半期なら 60 日ほどの日数となる。これに①'と、「この間の分散はほぼ一定」という仮定が成り立つと考えると、

$T$ 年間の変動率 $R_T$ は、互いに独立な $n$ 個の日次変動率 $r_t$ の合計に等しい

ことから、中心極限定理が成立する。ここには、日次変動率の正規性は要求されない。中心極限定理をいまの場合に読み替えると、次のことが期待できる。

$T$ 年間の変動率 $R_T$ は、分散 $n\sigma^2$ の正規分布に漸近する

実際に 1950 年以降の SP について、検証してみよう。図 1.10 は、1 日から 500 日間隔で求めた分散、同じく図 1.11 は尖度である。図 1.10 は両対数プロットで、少なくとも間隔 1 日から 200 日の範囲では傾き 1 の直線となっており、

$$(1.9) \quad \text{分散} \propto \text{日数 } n$$

すなわち、中心極限定理の「分散 $n\sigma^2$ 」の部分が成立している。残る正規性が確認できれば、リスク指標としての VaR の正当性が裏付けられたことになる。しかしながら、図 11 に示されている通り、尖度は 100 日まで 3 を超えており、200 日でも 1.7、500 日でやっと 0.35 まで下がる。つまり、500 日間隔くらいまで長くなると正規分布とする仮定は難しい可能性がある。

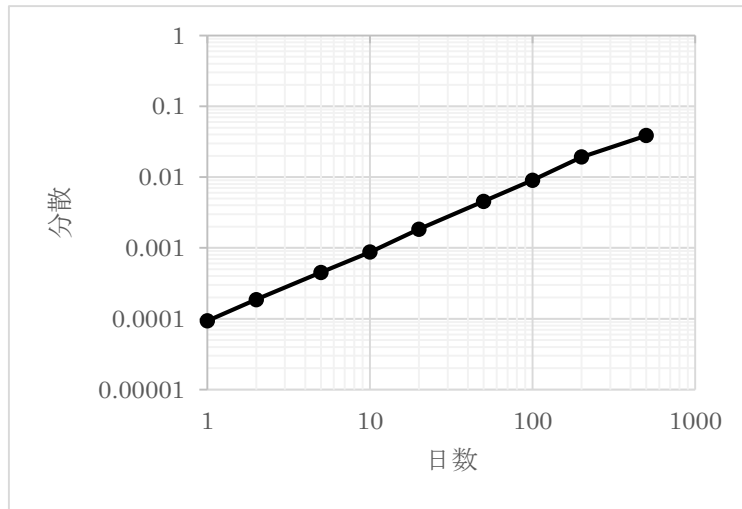


図 1.10 それぞれの間隔で求めた変動率の分散

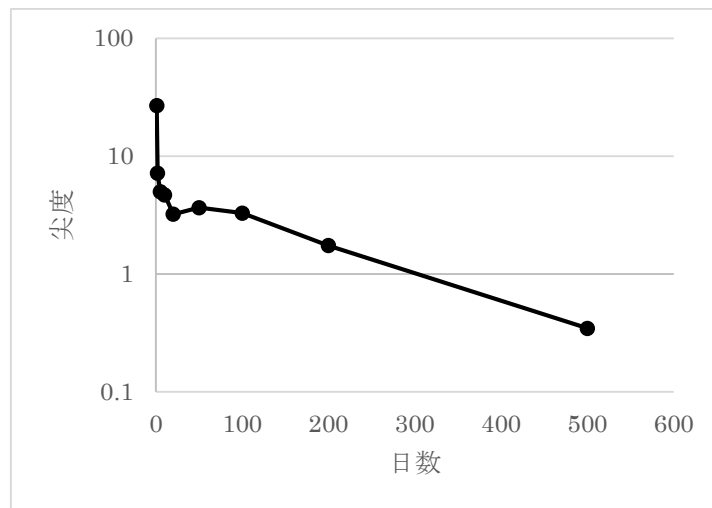


図 1.11 それぞれの間隔で求めた変動率の尖度

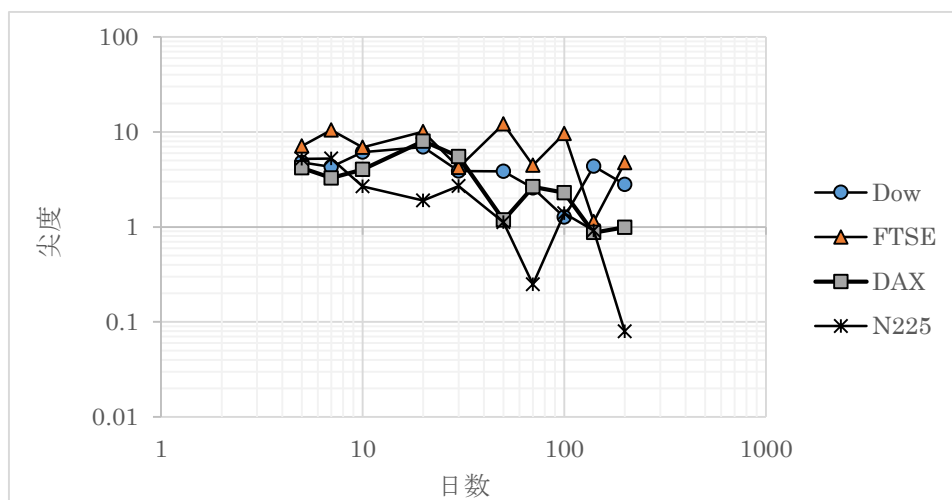


図 1.12 1950 年以降の Dow, FTSE および N225 と 1960 年以降の Dax の間隔と尖度

図 1.12 は、同じく Dow, FTSE, DAX および N225 の尖度であり、N225 以外は間隔 200 日でも尖度は 1 より大きい。そもそも 1950 年から 2019 年までの株価を同質の情報と見なしてよいのかという問題もあるが、少なくともここでの結果は、200 日程度の間隔で正規性はそれほど期待できないことを示している。なお、この問題に係る興味深い話題としてオプションプレミアムが描くスマイルカーブを章末の補足 1.1 で紹介している。

正規性の下に推定した VaR の利点は、推定の簡便さにある。株価変動率の統計分布について議論が収束していない今日、ほかに代わるものがない状況において、まだしばらくは VaR が用いられるものと思われる。

## 1. 7 脈動する Volatility

1.4 節以降のロジックを繰り返すと、

株価の日次変動が「(1) 定常」で「(2) 不規則」であるなら、もっと期間の長い変動率について中心極限定理が成り立ち、正規分布で近似できる

ということから、最悪の可能性として求めた 1% 点が VaR であった。だが、実際の株価変動率を調べると、200 日程度の期間では正規分布への収束は十分でなく、fat tail の影響を引きずっており、VaR はリスクを過少に評価している可能性が高い。はじめにで触れたように、この問題はすでによく知られており、さまざまな改善が試みられてきた。

しかしながら、なぜ株価変動率は fat tail を示すのか、という問題を明らかにしない限り、いかなる改善も対症療法でしかない。そして、おそらく fat tail は (1) の定常性が成り立たないこととリンクしている。まず、株価に限らず多くの金融指標の変動が定常ではなく、脈動するような変化を示すことは古くから知られていた。前節で紹介した Mandelbrot は、この特性について次のように指摘している。

Large changes tend to be followed by large changes of either sign and small changes tend to be followed by small change[2]

言い換えるなら、価格変動に記憶があって、変動の激しさがある程度持続するということである。

図 1.13 はその証拠であり、図 1.4 と同じく、Dow と 4 社の株価変動率「絶対値」の自己相関係数である。変動率の平方値を用いてもほぼ同じ結果が得られる。つまり、変動率そのものではなく、変動の大きさについて自己相関係数を求めると、もはや Dirac のデルタ関数ではなく、緩やかな減少関数となる。言い換えるなら、volatility はかなり緩やかな時間スケールで大きくなったり、小さくなったり脈動している。この「変動の激しさ



(volatility)が記憶を持つ」という現象こそが、long memory とか volatility clustering と呼ばれるものであり[16, 17], 中心極限定理の要件の1つである「volatility の定常性」は真っ向から否定されてきた。

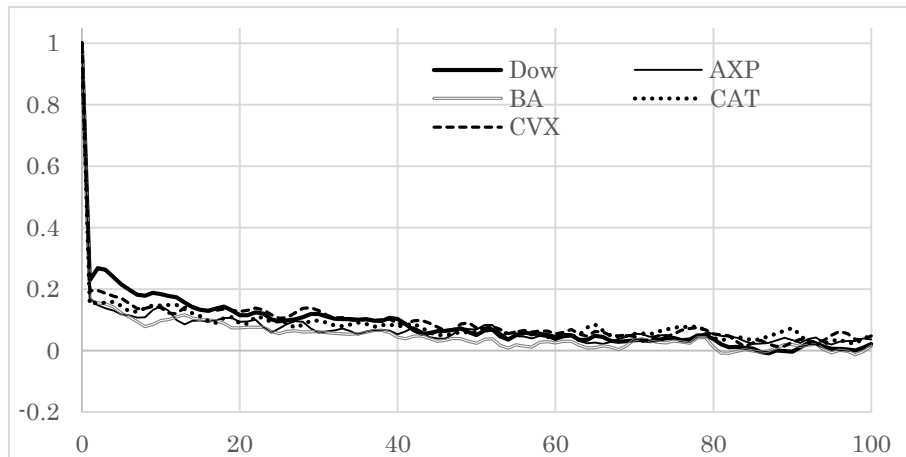


図 1.13 2010/1/5～2018/12/31 の Dow, AXP, BA, CAT および CVX 日次変動率  
絶対値の自己相関係数

付言すると、自己相関係数は現象の定常性を前提とした分析法であり、これによって株価変動の非定常性を検証するという事に矛盾を感じる向きがあるかもしれない。この点については、変動率の絶対値について、脈動の時間スケールより十分に長い区間を対象とする限りで「定常と近似する」ことが許されると判断している。この判断の妥当性を厳密に示すことはできないが、次章以降で示す「鮮やかに抽出された、間違えようのない分析結果」によってある程度まで支持されると考えている。

さらにいえば、正規分布に従う不規則過程に対して、脈動するような振幅変調がかかれば、変動率の分布には長い裾が生み出され、fat tail となることは容易に頷ける。変動率の非正規性は、volatility clustering という非定常性から生み出されている可能性がきわめて高い。

## 補足 オプションプレミアムのスマイルカーブ

オプションの価格であるオプションプレミアムについては、第 5 章にも登場する Black-Sholes 式がよく知られている。現在の価格が  $S$  である資産を  $T$  年後に  $K$  で買う権利（コールオプション）の価格  $c$  を考えてみよう。 $T$  年後の資産価格  $S_T$  が確率分布  $p(S_T)$  に従うなら、このオプションから期待できる利益の現在価値は

$$(1.10) \quad e^{-rT} \int_K^{\infty} (S_T - K)p(S_T)dS_T$$

で与えられる。ここで  $r$  は非危険連続金利である。オプションの売り手と買い手がイーブン

であるためには、これがオプション価格（プレミアム）に等しくならなければならない。そこで、 $T$ 年後の資産価格の変動率 $\log_e(S_T/S)$ が平均 $rT$ 、分散 $\sigma^2 T$ の正規分布に従うと仮定して式(1.10)を求めると、Black-Sholes 式が導かれる<sup>2</sup>。このように、Black-Sholes 式には資産価格の変動率に対して正規分布が想定され、また当然に、そこでは分散の定常性も想定されている。

一般には、分散 $\sigma^2$ として過去 1 年間の volatility, いわゆる historical volatility が用いられる。しかしながら、現実取引されているオプションプレミアムは、行使価格 $K$ が現在価格 $S$ から外れるほど Black-Sholes 方程式による理論値を上回って、口角が上がった笑顔 (☺) の口元のような曲線、スマイルカーブを描くことが知られている。実際のオプション価格と Black-Sholes 式から逆算された $\sigma^2$ は implied volatility と呼ばれ、スマイルカーブは行使価格 $K$ が現在価格 $S$ から外れるほど implied volatility が historical volatility より大きくなることを意味している。

Fat tail は、平均からの大きい外れの出現確率が正規分布より高いということであり、したがって、現在価格 $S$ から大きく外れた行使価格であるほど、正規分布を用いた Black-Sholes 式のオプションプレミアムは過少に評価されている可能性が高い。つまり、fat tail は理論値にその分の上乗せを求めていることになる。もちろん、「正規分布ではない実際の分布」についての標準的な答えがない以上、この上乗せ分を評価する一般論はまだ存在していないが、スマイルカーブは市場が経験から織り込んだ調整と解釈することができる。

---

<sup>2</sup> 実際の Black と Sholes の論文における導出は別のロジック（フルヘッジされたリスク資産は非危険資産に等しくなる）に従っているが、結果は同じである。

## 第2章 ひたすらに精緻化された volatility clustering 研究

### 2.1 経緯

Volatility clustering については、Roma Cont による、Mandelbrot の発見に触れたのちの、次の記述がよく知られている。

A quantitative manifestation of this fact is that, while returns themselves are uncorrelated, absolute returns or their squares display a positive, significant and slowly decaying autocorrelation function:  $\text{corr}(|r_t|, |r_{t+\tau}|) > 0$  for  $\tau$  ranging from a few minutes to several weeks.[18]

まさに図 1.13 に示した結果にほかならない。

「自己相関係数（または関数）が緩やかに減少する」、システム論などの世界では、これから応答関数やシステム関数の推定などへと進むことになるが、金融時系列分析は、きわめて独特な進化の道を辿った。Wikipedia が記述する Ding, Granger, Engle らが提案した ARCH, GARCH 分析である[6, 16, 17]。

### 2.2 ARCH、GARCH 分析

繰返しになるが、volatility clustering とは「変動率は自己相関しないが、その絶対値（あるいは平方値）が表す変動の激しさ（volatility）は自己相関する」ということであり、言い換えるなら、「変動率の分散が変化する」。これが heteroscedasticity と呼ばれる現象であり、分散不均一性などと訳されている。そして、金融時系列分析は、この分散不均一性をいかにして時系列モデルで再現するかという方向に進んだ。これが ARCH モデルと GARCH モデルである。

#### (1) ARCH モデル

いま、 $t$  日の日次変動率  $r_t$  が次の式で与えられると考える。

$$(2.1) \quad r_t = v_t + u_t$$

ここで、 $v_t$  は  $t-1$  までの変動率から求められる変動率の期待値、 $u_t$  は次の式で与えられる揺動項である。

$$(2.2) \quad u_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

ここで、 $\varepsilon_t$ は平均 0, 分散 1 の確率変数,  $\sigma_t$ は  $t$ とともに変動する volatility であり, 次の関係を仮定する。

$$(2.3) \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2$$

これを  $q$  次の ARCH (Auto-Regressive Conditional Heteroscedasticity) モデルといい, ARCH( $q$ )と表される。

## (2) GARCH

実際の ARCH 分析では, 次数  $q$  が大きくなりがちであったことから, 次のような拡張が行われた。

$$(2.4) \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \cdots + \beta_p \sigma_{t-p}^2$$

これが ( $p, q$ ) 次の GARCH (Generalized ARCH) モデルと呼ばれるもので, 一般には  $p=1, q=1$  で十分に再現できるとされている。

## (3) GARCH モデルの拡張

GARCH モデルは, その後にさまざまな拡張版を生み出した。以下に 3 つだけあげている。

### ●EGARCH (Exponential GARCH)

Volatility  $\sigma_t^2$ ではなく, その対数について(2.4)式を仮定したもので, volatility の非負性が組み込まれる。

### ●GJR GARCH (GJR は考案者の頭文字)

Volatility の非対称性を組み入れたモデルである。

### ●多変量 GARCH

いわゆる多次元 AR の拡張版である。

## 2. 3 何が分かったのか

ARCH や GARCH モデルは「変動する volatility を記述する」ために考案されたモデルであり, 当然ながら volatility clustering が再現される。また, 拡張版によって, 株価が大きく下がったときと上がったときの非対称性なども再現される (再現するよう拡張したモデルであるから当然である)。

つまり, これらのモデルで volatility clustering は再現され, たとえば「volatility の時

間変化を組み込んだ VaR 推定」などへの拡張も可能となった。しかしながら、「そもそも volatility clustering とは、どのような仕組みで起こる現象であるのか」については、あまり具体的な知見が得られていない。

この事情は、一時期、経済時系列の世界で広がった ARMA や ARIMA モデルによる分析を想起させる。たとえば GDP 増減率などに ARMA 過程を想定し、最適モデルを推定したとして、議論が「このような式が当てはまりました」から出なければ、何のための分析であったのかが問われることになる。その典型的な指摘を『計量経済学の新展開』で用いられた measurement without theory という文言に見ることができる[19]。「何が知りたくて分析を行い、結果として何が分かったのか」、この問いに明確な回答ができなかったことへの痛烈な批評とあってよい。

この点、前もって想定した分散不均一性や非対称性を別にすると、推定した時系列モデルが何を語っているのか、ARCH や GARCH 分析の多くもまた十分な回答を提示していないように思われてならない。この問題については、次章で再度言及する。

次章以降では、自己相関係数と相互相関係数という、当初の volatility clustering 検出に用いられたもっとも基本的なツールに立ち戻って、現象がどこから生み出されているかを検証する。

### 第 3 章 自己相関係数と緩和過程

#### 3. 1 緩和する自己相関係数

第 1 章で示したように、Dow などの日次変動率の自己相関係数は Dirac のデルタ関数となつて規則性を示さないが、日次変動率絶対値の自己相関係数は緩やかな緩和を示す、図 1.13 がこのことを物語っていた。そこで、図 1.13 の縦軸を対数目盛で描くと、図 3.1 となり、ラグ 5~60 日の領域では、いずれも平行な直線で近似できそうに見える。言い換えると、自己相関係数を  $C(s)$  とおいたとき、

$$(3.1) \quad \log_e C(s) = ps + q$$

あるいは

$$(3.2) \quad C(s) = C_0 e^{-s/\tau}, \quad C_0 = e^q, \quad \tau = -1/p$$

が想定できることになる。次節で示すように、これは 1 次の AR 過程あるいは 1 次の緩和過程と呼ばれるシステムの自己相関係数にほかならない。節を改めて概説する。

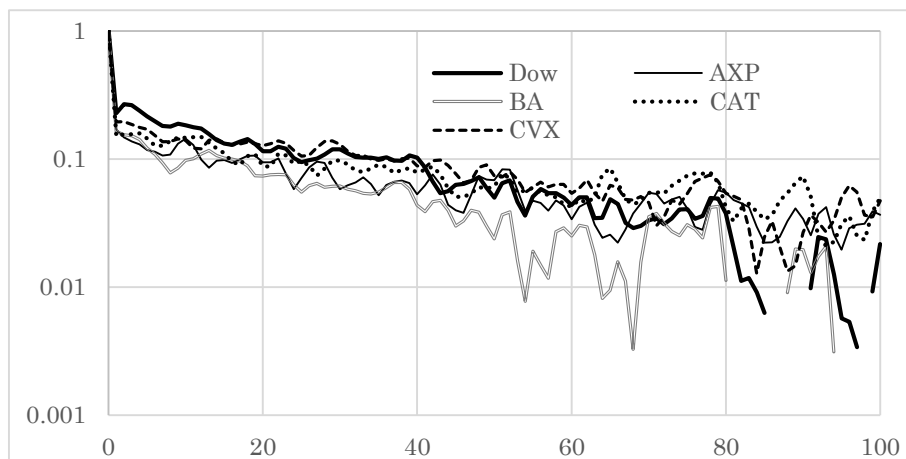


図 3.1 2010/1/5~2018/12/31 の Dow, AXP, BA, CAT および CVX 日次変動率絶対値の自己相関係数 (縦軸のみ対数目盛)

#### 3. 2 1 次の緩和過程の自己相関係数

時間  $t$  に対して状態変数  $x$  が次の微分方程式に従うケースを考える。

$$(3.3) \quad \frac{dx}{dt} = ax$$

初期値を  $x_0$  とすれば、容易に次の解を得る。

$$(3.4) \quad x = x_0 e^{at}$$

したがって、初期値が 0 でなければ、 $a$  がプラスのとき  $x$  は発散し、マイナスのとき零解  $x = 0$  に収束する。

差分系

$$(3.5) \quad x_t = bx_{t-1}$$

でも

$$(3.6) \quad x_t = x_0 e^{at}$$

と同じ結果を得る。ただし、

$$(3.7) \quad a = \log_e b$$

である。

ここで、状態変数  $x$  が定常過程を記述しているのであれば、

$$(3.8) \quad a < 0 \quad \text{あるいは} \quad b < 1$$

でなければならない。このとき、 $x_0$  だけはずれた  $x$  は次第に零解に戻る。

$$(3.9) \quad x = x_0 e^{at} = x_0 e^{-t/\tau}$$

であるから、 $x$  は  $\tau$  後に  $x_0$  の  $1/e$  まで減衰する。システム論の世界では、 $\tau$  は時定数 (time constant) あるいは緩和時間と呼ばれ、単純化するというなら、はずれの記憶時間に当たる。

次に差分系を用いて、動学方程式 (3.5) に揺動項  $n_t$  が加わった次の方程式を考える。

$$(3.10) \quad x_t = bx_{t-1} + n_t$$

ここで、揺動項  $n_t$  は

$$(3.11) \quad \langle n_t n_{t+s} \rangle = \sigma_n^2 \delta(s)$$

を満たす iid の不規則過程であり、 $\langle \dots \rangle$  は時間平均、 $\sigma_n^2$  は揺動項の分散、 $\delta(s)$  は Dirac のデルタ関数である。式(3.10)の両辺に  $x_{t+s}$  を乗じて、時間平均をとると、

$$(3.12) \quad \langle x_t x_{t+s} \rangle = b \langle x_{t-1} x_{t+s} \rangle + \langle n_t x_{t+s} \rangle$$

を得る。揺動項  $n_t$  は独立に変動するから、右辺第 2 項は 0 であり、さらに、定常な状態を

想定すると、 $\langle x_t x_{t+s} \rangle$  は時間  $t$  に依存せず、時間差  $s$  だけの関数となるから、

$$(3.13) \quad R(s) = bR(s-1), \quad R(s) = \langle x_t x_{t+s} \rangle$$

これから、

$$(3.14) \quad R(s) = R_0 e^{at} = R_0 e^{-s/\tau}, \quad R_0 = \langle x_t^2 \rangle$$

が得られる。なお、 $\langle x_t \rangle = 0$  に留意しておきたい。

$R(s)$  は自己相関関数と呼ばれ、自己相関係数  $C(s)$  とは次の関係にある。

$$(3.15) \quad C(s) = \frac{R(s)}{R(0)}$$

以上から、このようなシステムの自己相関係数として、

$$(3.16) \quad C(s) = e^{at} = e^{-s/\tau}$$

が導かれる。

いうまでもなく、式(3.10)は1次のAR過程にほかならず、システム論に倣って、ここでは1次の緩和過程と呼ぶ。ちなみに、式(3.3)に揺動項を入れた場合も自己相関係数は式(3.16)に一致する[20]。

さて、Dow 日次変動率絶対値について、実際に観測された自己相関係数は式(3.2)であり、式(3.16)と同じではない。そこで、第1次近似として、観測されたデータ  $y_t$  は、自己相関係数が式(3.16)となる1次の緩和過程  $x_t$  と不規則ノイズ  $e_t$  の和と考える。

$$(3.17) \quad y_t = x_t + e_t$$

不規則ノイズ  $e_t$  は次の条件を満たすものとする。

$$(3.18) \quad \langle e_t e_{t+s} \rangle = \sigma_e^2 \delta(s)$$

このとき、自己相関関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} \langle y_t y_{t+s} \rangle &= \langle (x_t + e_t)(x_{t+s} + e_{t+s}) \rangle \\ &= \langle x_t x_{t+s} \rangle + \langle x_t e_{t+s} \rangle + \langle e_t x_{t+s} \rangle + \langle e_t e_{t+s} \rangle \\ &= \sigma_x^2 e^{-s/\tau} + \sigma_e^2 \delta(s) \end{aligned}$$

したがって、自己相関係数は次のように式(3.2)に一致する。

$$(3.19) \quad C(s) = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_e^2} e^{-s/\tau}$$



以上から、Dow などの日次変動率絶対値が示す volatility clustering は、近似的に 1 次の緩和過程とランダムノイズの和と見なすことができる。

### 3. 3 先行研究で自己相関係数が閑却された背景

前節において、volatility clustering が 1 次の緩和過程と見なし得ることを示した。システム論的な視点に立つなら、これからシステム同定、言い換えるなら、「どのような仕組みなのか」を明らかにする作業が始まる。その出発点となるのが 3.1 節で示した「自己相関係数を対数プロットし、緩和時間を求める」分析である。

しかしながら、volatility clustering に関する先行研究についていえば、自己相関係数が掲載されていることは稀であり、緩和時間の推定も見当たらなかった。特に近年はほぼすべてが ARCH, GARCH あるいはその拡張版へと直行している。

GARCH 分析については前章でごく簡単に紹介したが、いうなら、適切な初期値から始めて最尤法で最適解を探し出すというきわめて複雑な分析手法である。では、なぜ直観的に分かりやすいはずのシステム論的なアプローチが主流とならず、複雑なモデル分析に集中することになったのか。ここではこの問題について、少し言及したい。

図 3.2 は、24 時間動き続けるドル円レートの分足データを示している。このように、データは分刻みで変動しており、その変動させる力の大きさが volatility である。一方、ほとんどの場合に分析に用いるデータは、日次終値、つまり、24 時間の動きの 1 点だけを抜き出した情報である。株価の場合は取引所が 24 時間開いているわけではないが、データが飛び飛びに抜き出された情報という点は変わらない。

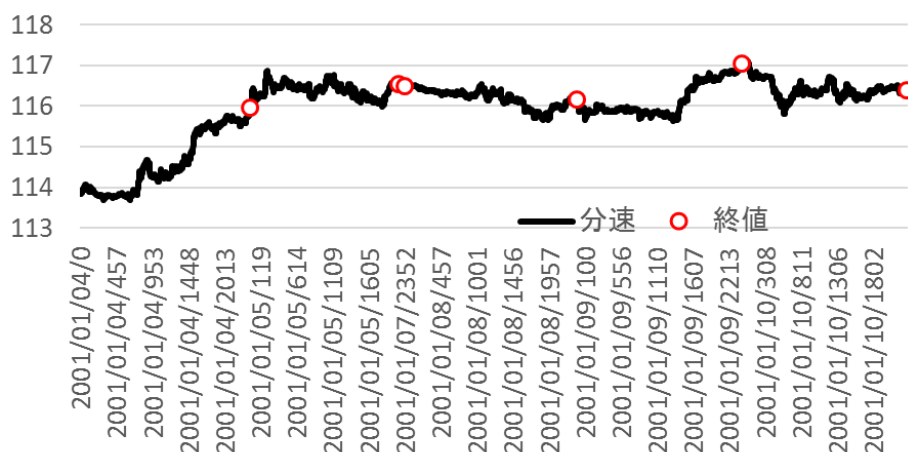


図 3.2 2001 年 1 月 4 日～1 月 10 日におけるドル円レートの分足データ  
(出所[21])

日次変動率絶対値の自己相関分析、あるいは日次変動率による GARCH 分析ともに、こ

のような「まばらに抜き取られた情報」から、揺動させる力の大きさを評価しようとする営みにほかならない。計測論の立場からいうなら、サンプリングは対象としている事象の最大周波数、いわゆる Nyquist 周波数の 2 分の 1 より高いレートで行わなければ、折り返し雑音 (aliasing) の混入を免れない[20]。金融時系列の場合、取引時間や休日があることから、原則論に従うことは不可能であり、当初から雑音が混入した情報として望む必要がある。

改めて図 1.13 に示された自己相関係数の  $C(1)$  に注目すると、およそ 0.2 であり、式(3.19)に従えば、全変動に占める緩和成分の大きさは 5 分の 1 程度しかないことが分かる。このように、volatility clustering 研究は雑音に埋もれた現象の抽出であり、結果として、分析内容はかなりの幅でぶれることになる。GARCH 分析というトリッキーとさえ見えるツールを必要とした理由がここにあると思われる。

さらに自己相関係数についていえば、ツールとしての使い方に難があった可能性がある。以下、少し踏み込んだ推論を試みる。

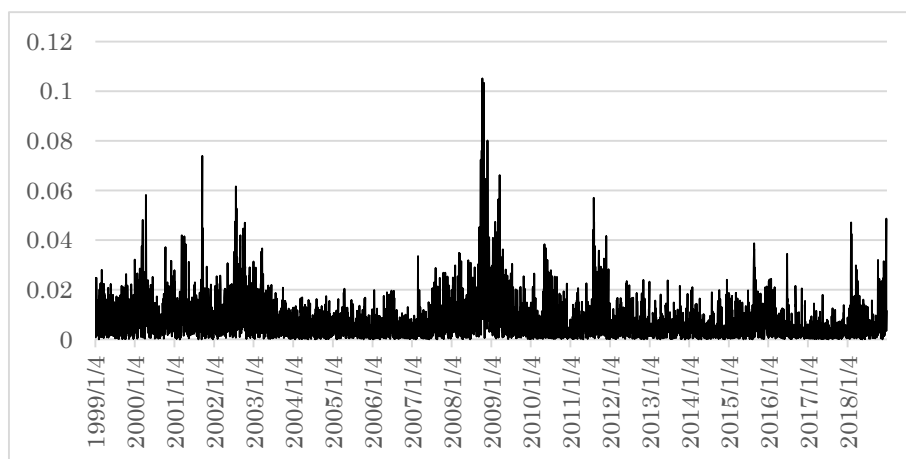


図 3.3 1999～2018 年における Dow 平均日次変動率絶対値の推移

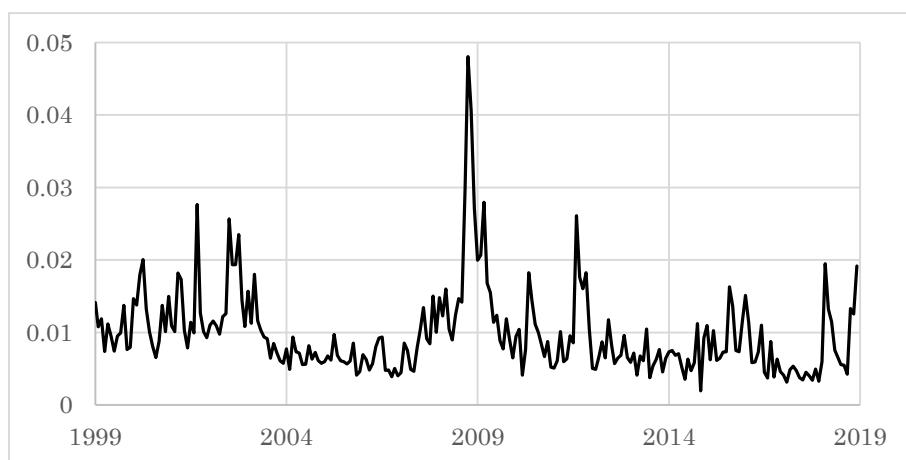


図 3.4 1999～2018 年における Dow 平均日次変動率の 1 か月ごとの標準偏差の推移

図 3.3 は、過去 20 年間の Dow 日次変動率絶対値の推移であり、この脈打つような激しい変動が volatility clustering にほかならない。さらに、図 3.4 は、1 か月ごとに求めた日次変動率の標準偏差、すなわち、短期的に推定した historical volatility であり、ここでも図 3.3 の変動がほぼ再現されている。ここで、いずれのトレースでも、0.01 ほどの水準がベースラインとなっていて、その上に突出する形でバースト上の変動が乗っていることに注目したい。たとえば 2013 年や 2014 年はほぼベースライン前後で推移し、2015 年はバースト大きくなるなど、変動幅は小さくない。

図 3.5 は 2005 年以降の Dow 日次変動率絶対値について、2 年ごとに推定した自己相関係数の対数プロットである。凡例の y2006 は 2005~2006 年の 2 年間を指している。ここでは y2018, y2012, y2010 は狭い範囲に収まっているものの、y2008 は突出して高く、y2012 は低い。ラグ 1 での自己相関  $C(1)$  に注目すると、0.1 から 0.4 の幅に広がり、この結果は時期によって volatility clustering の強さがかなり大きく変動することを示している。言い換えるなら、volatility clustering を安定的に捉えるには、それなりの観察期間が必要ということである。

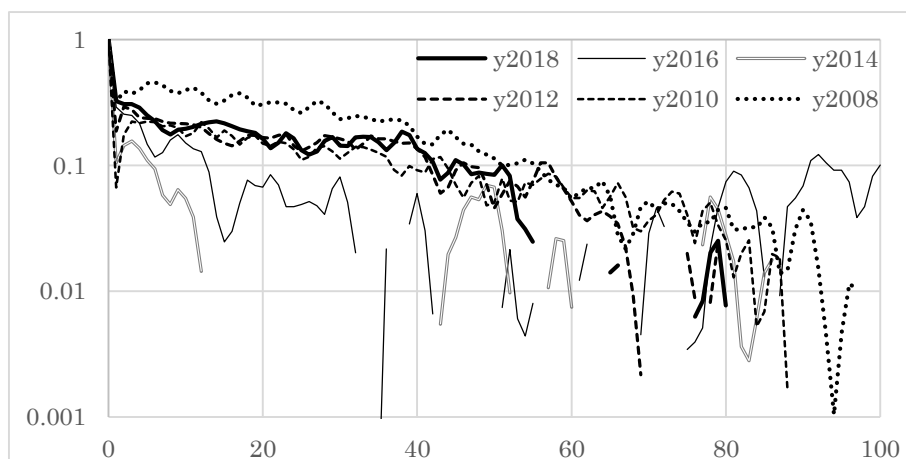


図 3.5 2 年ごとに求めた Dow 日次変動率絶対値の自己相関係数（縦軸のみ対数目盛）

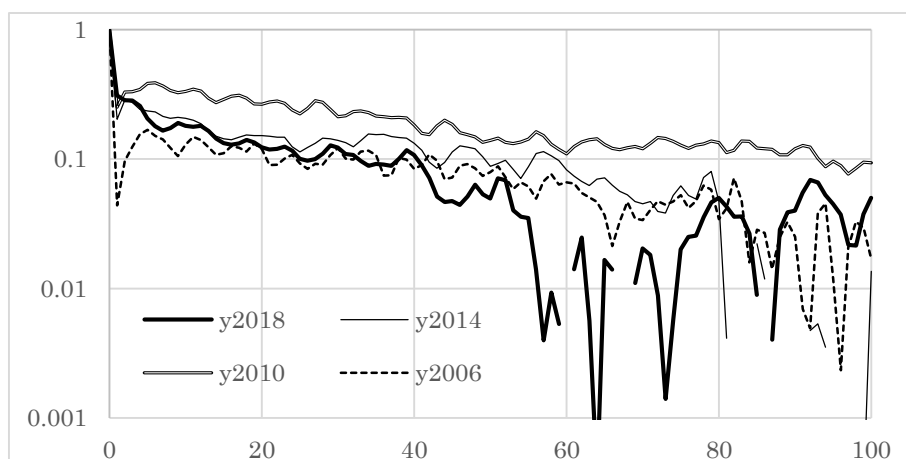


図 3.6 4 年ごとに求めた Dow 日次変動率絶対値の自己相関係数（縦軸のみ対数目盛）

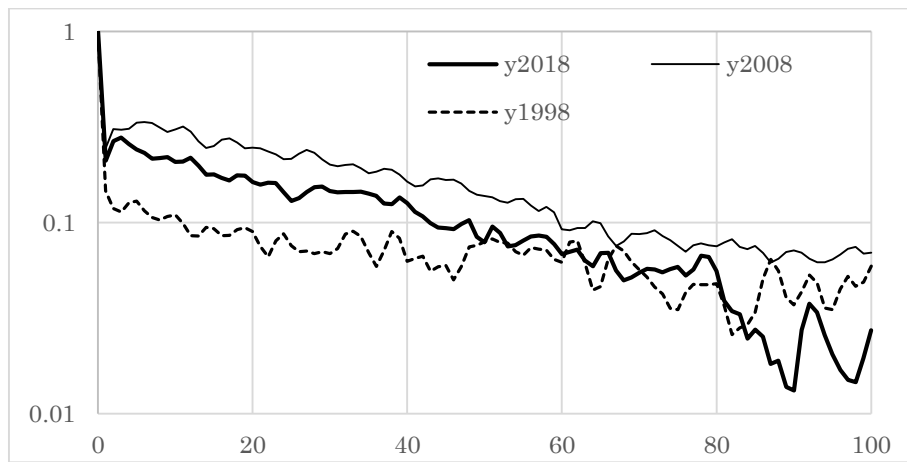


図 3.7 同じく 10 年ごとに推定した自己相関係数（縦軸のみ対数目盛）

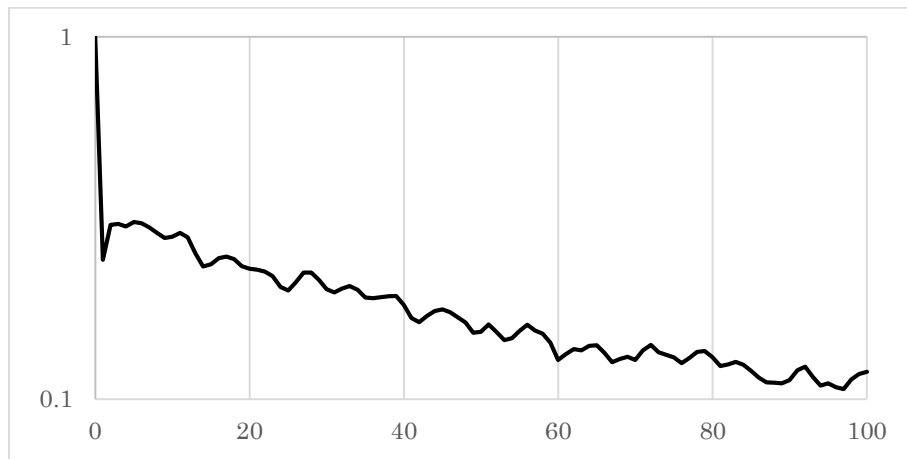


図 3.8 同じく 2018 年までの 20 年間で推定した自己相関係数（縦軸のみ対数目盛）

そこで、推定区間を 4 年、10 年、20 年と代えた結果が図 3.6～図 3.8 であり、少なくともラグ 5～40 日の領域ではきわめて類似した傾きの直線に近づいているように見える。

ラグ 5～40 日の領域で回帰直線を当てはめて推定した緩和時間  $\tau$  は表 3.1 の通りであった。これらのことから、信頼できる結果を得るのに推定期間 4 年では明らかに短かすぎ、10 年でも不安定であることが分かる。

付言すれば、緩和時間 60 日とは、1 か月の営業日数を 20 日としてほぼ 3 ヶ月、0.25 年となる。周波数で考えると、 $2\pi$  を乗じておよそ 1.6 年の周期に相当する現象である。その観測に周期の数倍以上の期間を要することは計測分野の常識ともいえ、10 年以上が必要という先の推測と整合する。もちろん、観測期間が長くなれば、時代変化などさらに厄介な問題が加わる可能性もあり、結局は図 3.6～図 3.8 に示すような段階的な検証の上に、共通して認められる特性を抽出するというのがベストの手法と思われる。

以上のことから、本研究では、Dow のみならずさまざまな指標について推定を繰り返し、観察 20 年である程度安定した結果が得られると判断した。

表 3.1 回帰係数およびその推定誤差から求めた緩和時間

年数	期間	$\tau$	95%区間
4 年	2015-2018	48	41~59
	2011-2014	80	60~122
	2007-2010	57	51~64
	2003-2006	76	57~115
	1999-2002	21	18~26
	1995-1998	46	38~59
10 年	2009-2018	59	52~67
	1999-2008	54	50~59
	1989-1998	78	59~112
20 年	1999-2018	71	64~80

ここで、本章のテーマ「先行研究で自己相関係数が閑却された背景」を改めて考えてみたい。既述したように、先行研究では、少なくともチェックできた範囲内において自己相関係数の対数プロットは見られなかった。極端な例を挙げると、power law を当てはめ、しかも、両対数プロットさえしないケースも見られた<sup>3</sup>。ここまで示したように、自己相関係数の緩和特性は片対数プロットを行わなければ見分けにくく、これにそもそもの推定の不安定さが加わって、自己相関係数が忌避されたのではないかと思われる。

本論の趣旨とは直接に関わらないが、この事情の一端を窺わせる分析例を示す。なお、以下の内容は主に久留米大学原田康平特任教授の助言に拠っている。

時系列分析の世界では、Wiener-Khinchine の定理によって、自己相関係数とスペクトルが同じ情報を提供することがよく知られている。そして、自己相関係数が指数関数で表されるとき、スペクトルは Brownian 型の形状（低周波で一定、高周波で周波数の 2 乗に逆比例）を示し、遮断周波数  $f_c$  は緩和時間  $\tau$  に対して  $1/2\pi\tau$  で与えられる [20]。

図 3.9 は、実際に Dow 日次変動率絶対値のスペクトルを示している。推定には Excel のフーリエ解析を用いているため、最大 4096 個のデータまでしか分析できず、したがって、2002 年終わりから 2018 年までのデータが対象である。

では、この結果を Brownian 型のスペクトルと見なしてよいのか。もちろん、このままでは判断することはほぼ不可能であり、両対数プロットを行なうと図 3.10 を得る。緩和時間  $\tau$  が 70 日であるなら、遮断周波数はおよそ 0,002 であり、図中の矢印のあたりとなる。これより左で次第にフラットになり、右では傾き 2 の直線に近く、Brownian 型の形状に

<sup>3</sup>  $y = ax^\alpha$  を power law, 日本語でべき乗則といい、両対数プロットしたときに直線となる。

近くなって、自己相関係数からの知見と整合することが分かる。とはいえ、4096日の推定結果でははっきりした判断が難しく、この程度の観察期間では情報精度が足りないことも見てとれる。

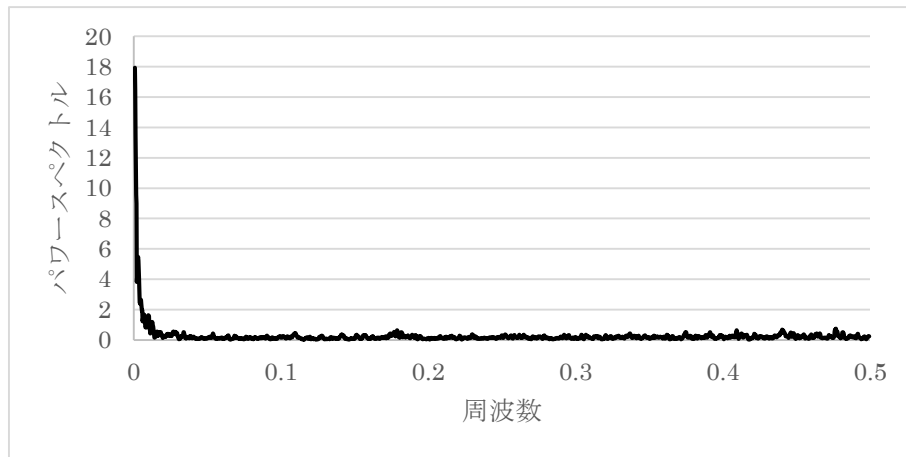


図 3.9 2018 年末まで 4096 日分の Dow 日次変動率絶対値のパワースペクトル

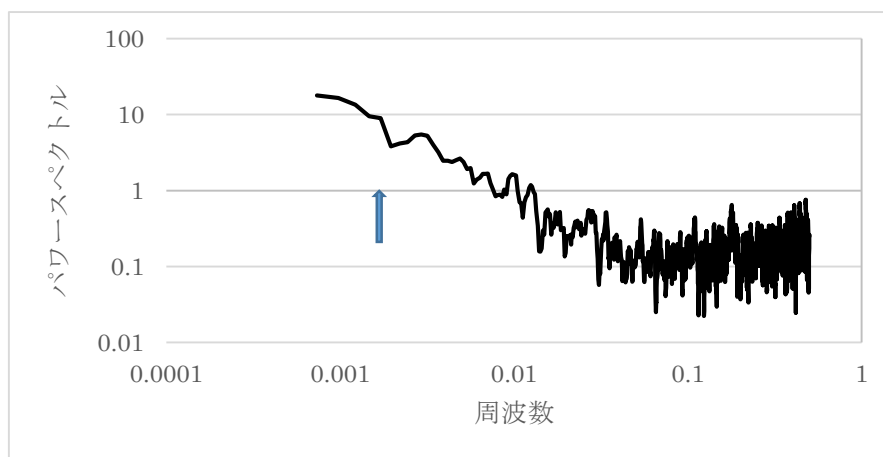


図 3.10 2018 年末まで 4096 日分の Dow 日次変動率絶対値のパワースペクトル  
(両対数プロット)

ところで、このことと先行研究で自己相関係数が使われないこととどう係るのか。経済時系列分析の世界におけるスペクトル研究の第 1 人者はおそらく G.W.J.Granger で異論ないものと思われる。彼が著わした"Spectral analysis of economic time series"[22]は、フーリエ解析に関する詳細な解説が掲載された、経済時系列のスペクトル分析に関する代表的テキストと見なされている。ところが、この本には両対数でプロットされたスペクトルの図がまったく登場しない。このため、分析によって何が分かったのかがきわめて分かりにくく、具体例の解説は手法に関する明快な記載と好対照をなしている。Granger は Engle とともに GARCH 分析のパイオニアでもあり、2003 年にノーベル経済学賞を受賞している。

以上は Granger 氏に対する批判ではない。それぞれの専門分野において、慣習として独特の分析手法と解釈のやり方があり、それによってさまざまな発見や進歩があったと思う。そして、自己相関係数とスペクトルについていえば、片対数プロット、両対数プロットなど主に工学系の分析現場で常識的に行われている手法が、常識的ゆえに経済分野ではうまく伝わらず、それが分析手法そのものまで遠ざける事態を生んだのではないか。

もちろん、GARCH 分析で *volatility clustering* の何たるかがきちんと解明されるのであれば、あえて自己相関係数を持ち出す理由はない。本研究で自己相関係数とその多変数版である相互相関係数を用いた理由は次章以降で示される。

## 追記

本節の内容は十分な検証に基づくものではなく、学術論文として適切ではないかもしれない。しかしながら、*volatility clustering* 研究分野において自己相関係数（さらには相互相関係数）というきわめて基本的なツールが閑却され、GARCH 分析というかなりトリッキーな手法に席卷されている実情のもとで、基本ツールでも新たな発見が可能であると主張するには、その判断根拠を示すことが必要と考えた。

## 第4章 Dow とその他の金融指数の volatility clustering の比較

### 4.1 データについて

前章で示した考察に基づいて、ここでは 1998 年から 2017 年まで 20 年間の Dow, SP, FTSE, DAX, CAC, N225, SSE, HSI Y10, JPY/USD, CHF/USD および GBP/USD の日次変動率絶対値 (Y10 のみ差分の絶対値) が示す volatility clustering を自己相関係数に基づいて検証する。

なお、次章では Dow を基準とした相互相関係数によって互いの関係を分析するが、このとき、それぞれで異なる休日の取り扱いが問題となる。たとえば Dow と FTSE を考えたとき、Dow, FTSE とともに休日は無視するとして、ほかに次のようなケースが存在する。

- a) Dow 休日, FTSE 営業
- b) Dow 営業, FTSE 休日

対応として 2 つが想定できる。

#### case1

どこかが営業しておれば可とし、休日は変化がないということで直近営業日の値のままとする。

#### case2

アメリカ市場を中心に考えて、Dow 営業のみ有効とする。したがって、a) のデータはすべて削除し、b) の場合は直近営業日の値のままとする

	X		Y		Case1		Case2	
	終値	$r_X$	終値	$r_Y$	$r_X$	$r_Y$	$r_X$	$r_Y$
日付1	X1	$\text{Ln}(X1/X0)$	Y1	$\text{Ln}(Y1/Y0)$	$\text{Ln}(X1/X0)$	$\text{Ln}(Y1/X0)$	$\text{Ln}(Y1/Y0)$	$\text{Ln}(Y1/Y0)$
日付2	ns(X1)	$(\text{Ln}(X1/X1)=0)$	Y2	$\text{Ln}(Y2/Y1)$	0	$\text{Ln}(Y2/Y1)$	$\text{Ln}(Y3/Y1)$	$\text{Ln}(Y3/Y2)$
日付3	X3	$\text{Ln}(X3/X1)$	Y3	$\text{Ln}(Y3/Y2)$	$\text{Ln}(X3/X1)$	$\text{Ln}(X3/X1)$	$\text{Ln}(Y4/Y3)$	$\text{Ln}(Y4/Y3)$
日付4	X4	$\text{Ln}(X4/X3)$	Y4	$\text{Ln}(Y4/Y3)$	$\text{Ln}(X4/X3)$	$\text{Ln}(X4/X3)$	$\text{Ln}(Y5/Y4)$	0
日付5	X5	$\text{Ln}(X5/X4)$	ns(X4)	$(\text{Ln}(X4/X4)=0)$	$\text{Ln}(X5/X4)$	0	$\text{Ln}(Y6/Y5)$	$\text{Ln}(Y6/Y5)$
日付6	X6	$\text{Ln}(X6/X5)$	Y6	$\text{Ln}(Y6/Y5)$	$\text{Ln}(X6/X5)$	$\text{Ln}(X6/X5)$		

上に具体例を示している。ここで「ns」が休日である。図 4.1 は Dow, 図 4.2 は FTSE について、2 つのケースの自己相関係数を示している。少なくともラグが 50 日程度まで、



両者の差異は小さい。このことから、以下では Dow 営業日だけを対象とした case2 での分析結果だけを示す。

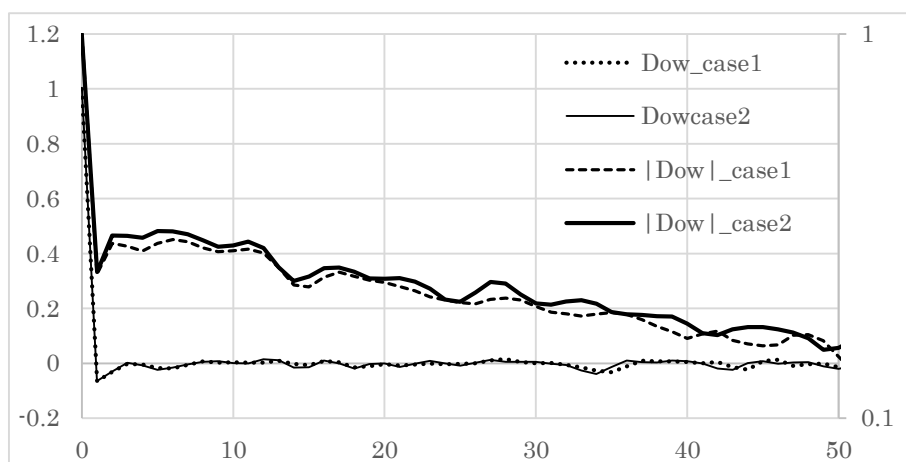


図 4.1 1998～2017 年における case1 と case2 で標本化された Dow 日次変動率  
および絶対値の自己相関係数

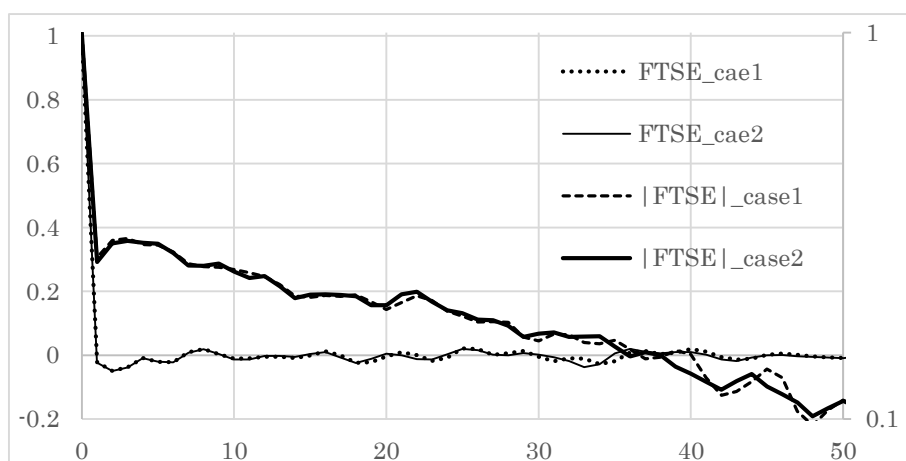


図 4.2 1998～2017 年における case1 と case2 で標本化された FTSE 日次変動率  
および絶対値の自己相関係数

なお、Dow のラグ 1 で弱い負の相関が見られる点について言及しておきたい。一見、「上がった翌日は下がり、下がった翌日は上がる」傾向を示唆しているように見えるが、図 1.6 で見たように、細かい区間で見ると、このマイナス相関は一貫していない。そこで、一つの可能性として、離散的に標本化された Dow 日次終値は、ランダムな雑音の混入を免れないと考えてみよう。ここでいうランダムな雑音とは、日次変動率絶対値に含まれている雑音ではなく、終値そのものの系列に含まれる成分である。この自己相関係数が Dirac のデルタ関数になるのであれば、変動率にはその差分に比例した変動が混じり込む。

具体例を示すと、図 4.3 は直線的な変化に不規則雑音が加わった系列である。これを毎日の株価と見立てて日次変動率および絶対値の自己相関係数を求めると図 4.4 を得る。変

動率についてはラグ 1 のところだけマイナス相関，絶対値は逆にラグ 1 だけでプラスの相関が登場する。

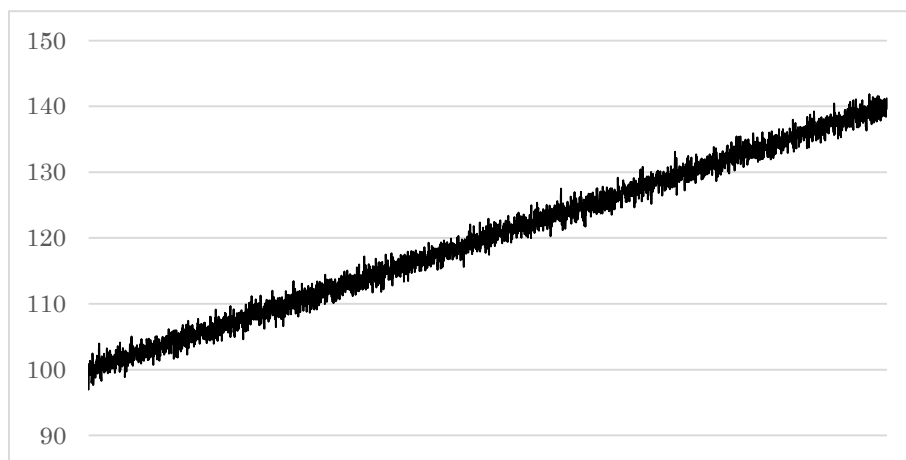


図 4.3 直線的な変化に不規則雑音が合わさった系列

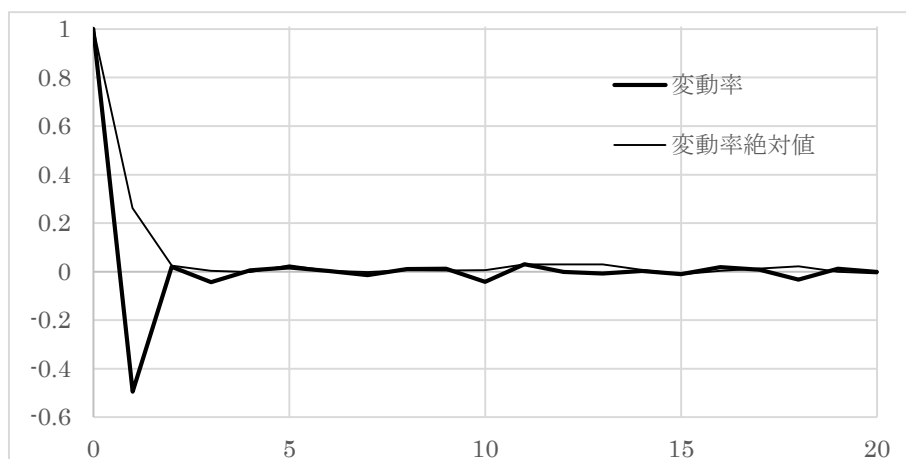


図 4.4 図 4.3 に示された不規則系列日次変動率の自己相関係数

よく知られているように，自己相関係数が Dirac のデルタ関数となる雑音（一般には白色雑音と呼ばれる）の差分系列の自己相関係数は，ラグ 1 のところでマイナス相関を示し，それ以外でゼロとなる。したがって，図 4.1 や図 4.2 にもこのような雑音が混入している可能性があり，ここでは踏み込まない。

以上は推測の域を出ないが，株価の変動に，時間スケールの異なる複数の現象が重なっている可能性には留意しておきたい。そのことと，ラグ 30 日や 40 日の範囲で「1 次の緩和過程で近似される」とした本研究の論理とは，少なくとも注目している時間スケールにおいて矛盾しないと考えている。

#### 4. 2 回帰係数の有意差の検証 …… 共分散分析

本章では、Dow や FTSE, DAX などの自己相関係数が示す緩和時間の比較を行う。このためのツールとして用いた共分散分析について概説しておきたい。

図 4.5 にラグ 5~30 日の Dow と DAX の日次変動率絶対値の自己相関係数（対数）を示している。いずれも直線的な変化を示しており、回帰直線を当てはめるとき、次の 3 つの選択肢があり得る。

- 1) どちらも同じ 1 つの回帰直線を当てはめる
- 2) 回帰係数は同じで、定数だけ異なる 2 つの回帰式を当てはめる
- 3) 回帰係数も定数も異なる回帰式を当てはめる

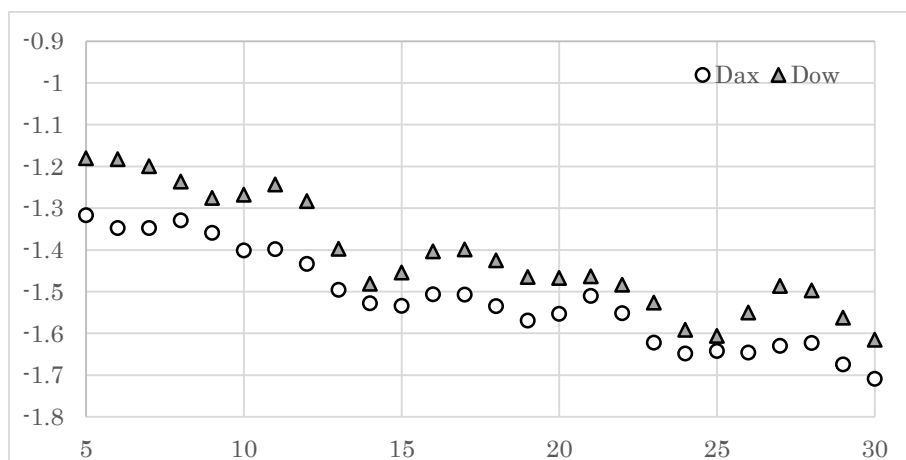


図 4.5 ラグ 5~30 日における Dow と DAX の日次変動率絶対値の自己相関係数（対数）

ここで、前章の式(3.19)を振り返ってみよう

$$(3.19) \quad C(s) = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_e^2} e^{-s/\tau}$$

対数をとると、

$$(4.1) \quad \log_e C(s) = -\frac{s}{\tau} + \log_e \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_e^2}$$

であるから、1) に対して 2) は、緩和時間は同じであるが、全変動に占める volatility clustering の割合が異なり、さらに、3) は緩和時間も異なることを意味する。

図 4.6 は Dow と DAX を 1 つの集団として求めた 1) の回帰直線を示しており、このときの平方和、回帰、残差平方和をそれぞれ  $S_y^T$ ,  $S_r^T$ ,  $S_e^T$  とすると、

$$S_y^T = 0.9478 \quad (\text{自由度 } 51), \quad S_r^T = 0.7197 \quad (\text{同 } 1), \quad S_e^T = 0.2281 \quad (\text{同 } 50)$$

であった。

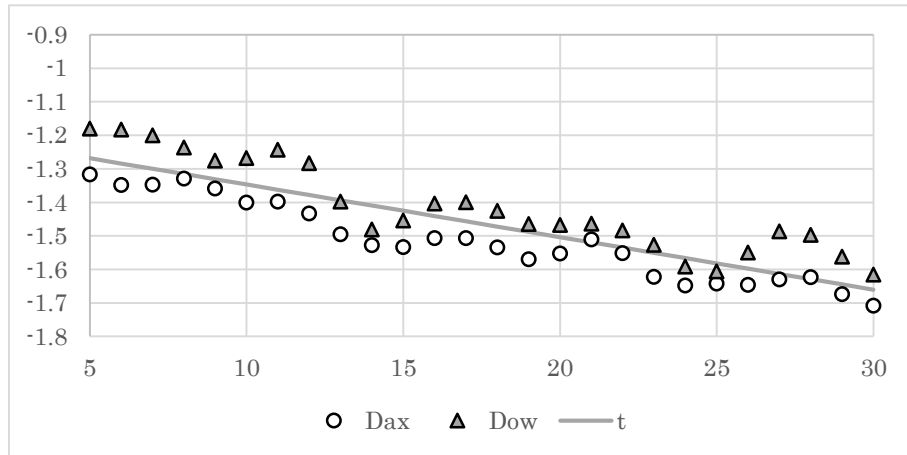


図 4.6 1つの回帰式をあてはめたケース

次に 2) のケースを考える。定数が異なるとは平均が異なるということであり，Dow と FTSE のそれぞれで平方和と偏差積和を求めて併合する。

$$(4.2) \quad \text{併合されたラグの平方和 } S_x^P = S_x^A + S_x^B$$

$$(4.3) \quad \text{併合された自己相関係数対数の平方和 } S_y^P = S_y^A + S_y^B$$

$$(4.4) \quad \text{併合された両者の偏差積和 } S_{xy}^P = S_{xy}^A + S_{xy}^B$$

これらから共通の回帰係数

$$(4.5) \quad a = S_{xy}^P / S_x^P$$

とそれぞれの定数

$$(4.6) \quad b_A = \bar{y}_A - a\bar{x}_A, \quad b_B = \bar{y}_B - a\bar{x}_B$$

が求められる。ここで， $\bar{y}_A$ ， $\bar{y}_B$ ， $\bar{x}_A$ ， $\bar{x}_B$ はそれぞれの平均である。これで求めた回帰直線を図 4.7 に示している。このとき，併合された残差平方和は次のように求められる。

$$(4.7) \quad \text{併合された残差平方和 } S_e^P = S_y^P - \frac{S_{xy}^P{}^2}{S_x^P} = 0.09070 \quad (\text{自由度 } 49)$$

「両群の定数は等しい」とするケース 1) に対して，定数の有意差は

$$(4.8) \quad F = \frac{S_e^T - S_e^P}{S_e^P / 49} = 74.23$$

が自由度 (1, 49) の F 分布に従うことから検証され，このケースでは「有意に異なる」との結論が導かれる。言い換えるなら，「変動に占める volatility clustering 成分の比率は

Dow と DAX で有意に異なる」ことになる。

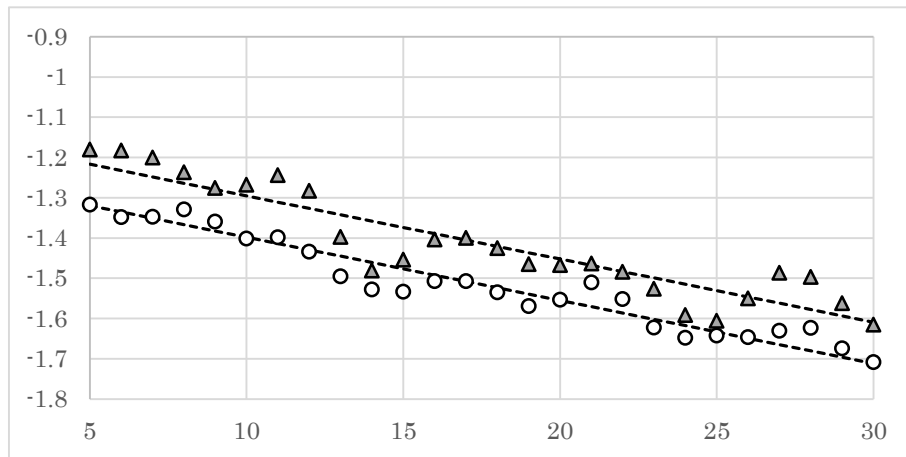


図 4.7 回帰係数は同じで、定数が異なる回帰式を当てはめたケース

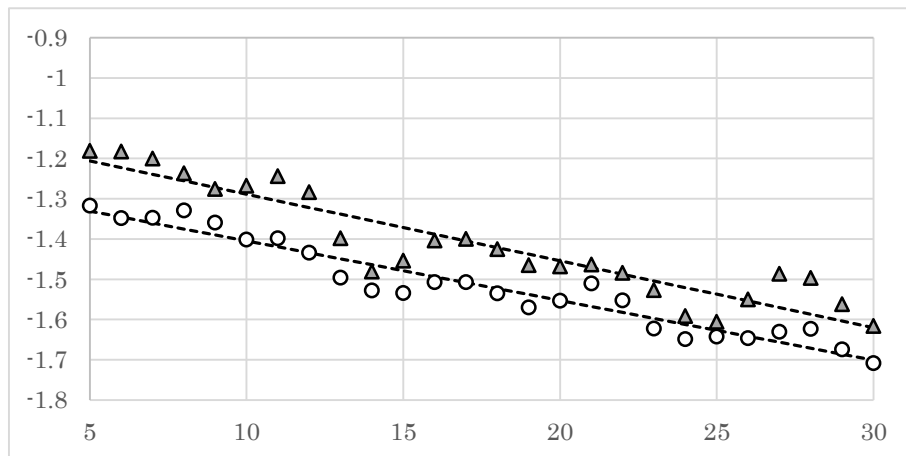


図 4.8 定数も回帰係数も異なる回帰式を当てはめたケース

図 4.8 は、Dow と DAX で別々に回帰式を当てはめた結果 3) である。このときの残差合計は

$$(4.9) \quad S_e^W = S_y^A + S_y^B - \frac{S_{xy}^A{}^2}{S_x^A} - \frac{S_{xy}^B{}^2}{S_x^B} \quad (\text{自由度 } 48)$$

であり、ケース 2) との有差は

$$(4.10) \quad F = \frac{S_e^P - S_e^W}{S_e^W / 68} = 1.21$$

が自由度 (1, 48) の F 分布に従うことで検証でき、いまの場合、「Dow と DAX の回帰係数に有意差を認めない」、言い換えると、「Dow と DAX の緩和時間に有意差を認めない」との結論を得る。

以上が共分散分析による緩和時間の有意差の検証であり、2群の比較のみならず、多群での検証も可能であるが、以下では、Dow との比較結果だけを示す。

#### 4. 3 Dow と各国株価指数の volatility clustering

図 4.9～図 4.11 は Dow, SP, FTSE, DAX, CAC, N225, SSE, HSI, Y10, JPY/USD, CHF/USD および GBP/USD の日次変動率絶対値の自己相関係数であり、すべての場合に緩やかな緩和が見られる。

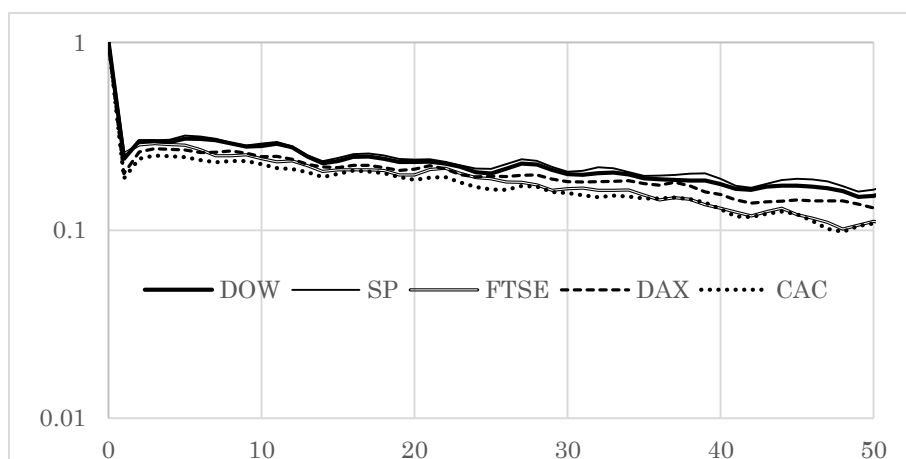


図 4.9 Dow, SP, FTSE, DAX および CAC の日次変動率絶対値の自己相関係数  
(1998～2017年, 縦軸のみ対数目盛)

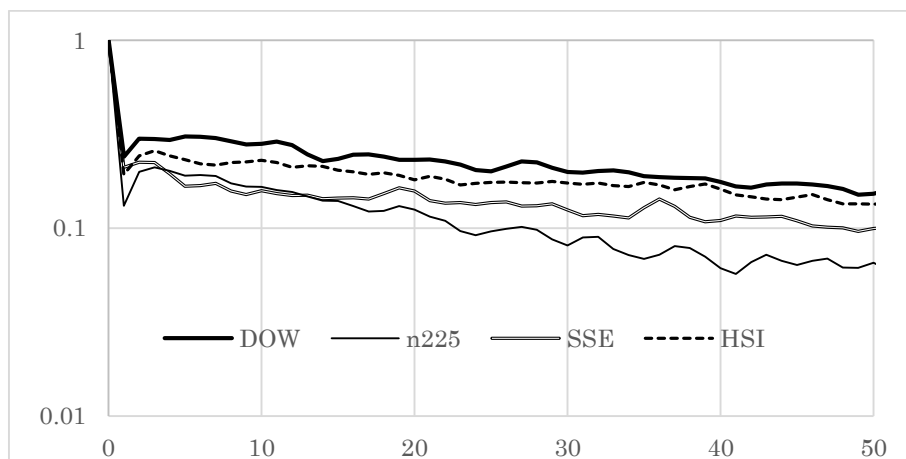


図 4.10 Dow, N225, SSE, および HSI の日次変動率絶対値の自己相関係数  
(1998～2017年, 縦軸のみ対数目盛)

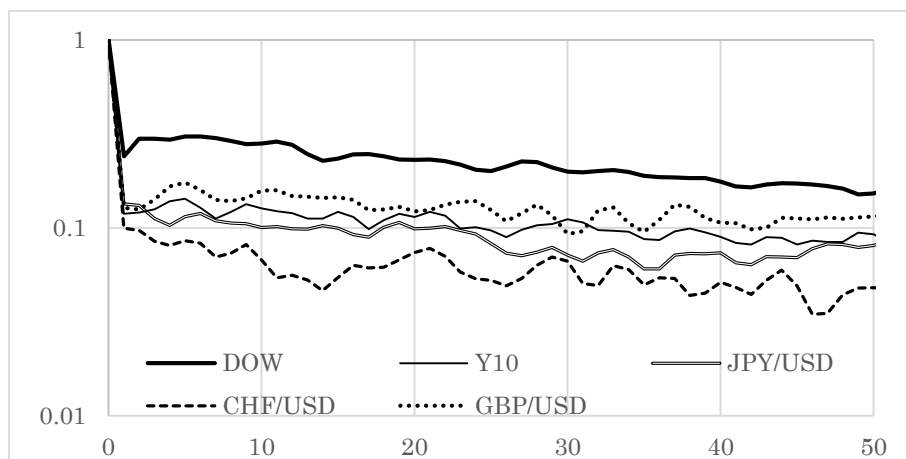


図 4.11 Dow, Y10, JPY/USD, CHF/USD および GBP/USD の日次変動率絶対値の自己相関係数（1998～2017年，縦軸のみ対数目盛）

表 4.1 は，ラグ 5～30 日の自己相関係数から求めた緩和時間と 95% 推定区間，および定数と回帰係数を Dow と比較した検定結果である。まず定数については，Dow に対して，すべての指標が有意差を示した。それぞれの市場において，全変動に占める Volatility clustering の割合は異なることになる。

表 4.1 各指標の緩和時間  $\tau$  とその 95% 区間，および Dow に対する定数と回帰係数の有意差

	$\tau$	95%区間	定数	回帰係数
DOW	60	52～73	/	/
SP	65	55～79	*	ns
N225	30	28～33	***	***
FTSE	55	49～63	***	Ns
DAX	68	61～76	***	Ns
CAC	60	54～67	***	Ns
SSE	104	83～140	***	***
HSI	76	67～89	***	*
Y10	92	67～149	***	**
JPY/USD	63	49～86	***	ns
CHF/USD	131	61～907	***	*
GBP/USD	72	55～104	***	ns

(\* :  $p < 5\%$ , \*\* :  $p < 1\%$ , \*\*\* :  $p < 0.1\%$ , ns : 有意差なし)

緩和時間については Dow が 60 日，1 か月の営業日数を 20 日と考えれば 3 カ月であり，

SP, FTSE, DAX, CAC および JPY/USD がこれと有意差を示さなかった。N225 は有意に短く、SSE, HSI, Y10, GBP/USD および CHF/USD は有意に長い値となった。ただし、**3.3 節**で詳述したように、volatility clustering の抽出はデータ区間の取り方などに依存したデリケートな作業であり、以上の結果については、改めて次章での分析結果と総合する形で論じる。ここでは、アメリカおよびヨーロッパの株価指数はほぼ同じ緩和時間の volatility clustering を示したという点に注目しておきたい。

#### 4. 4 自己相関係数を求める VB プログラム

参考までに、自己相関係数を配列 ac()に求めるプログラムを以下に示す。

##### ○メイン部

```
Dim x(10000) As Double    'データを格納する配列, サイズ 10000 は参考
Dim ac(100) As Double    '自己相関係数を格納する配列, 最大 100 は参考
Dim mxlag As Double      '最大ラグ
Dim nd As Integer        'データ数
```

```
mxlag = 100              '最大ラグを 100 に設定
' データを配列 x()に, データ数を nd に設定する
```

```
Call hyojunka(nd, x())   'データの標準化
Call ac_keisan(nd, mxlag, x(), ac()) '自己相関係数計算
'結果の出力
```

##### ○標準化

```
Sub hyojunka(nd As Integer, w() As Double)
    s = 0#
    For i = 1 To nd
        s = s + w(i)
    Next
    av = s / nd
    s = 0#
    For i = 1 To nd
        w(i) = w(i) - av
        s = s + w(i) * w(i)
    Next
```



```

sd = Sqr(s / nd)
For i = 1 To nd
    w(i) = w(i) / sd
Next
End Sub

```

○自己相関係数

```

Sub ac_keisan(nd As Integer, mxlag as Integer, x() As Double, ac() As Double)
    Dim acw(101) As Double
    For lg = 1 To mxlag + 1
        s = 0#
        For i = 1 To nd - lg
            s = s + x(i) * x(i + lg)
        Next
        acw(lg) = s / (nd - lg)
    Next
    For lg = 2 To mxlag
        ac(lg) = (acw(lg - 1) + 2 * acw(lg) + acw(lg + 1)) / 4
    Next
    ac(0) = 1#
    ac(1) = acw(1)
End Sub

```

なお、ここでは自己相関係数に対して3項移動平均による簡単な平滑化を行っている。

## 第5章 相互相関係数で検証する volatility clustering の グローバル性

### 5.1 相互相関係数について

自己相関係数 $C(s)$ は「自身と $s$ だけ経過した自身との相関」であったが、同じように相互相関係数 $C_{xy}(s)$ は「系列 $x_t$ と $s$ だけ経過した系列 $y_{t+s}$ との相関」である。なお、自己相関係数はプラスマイナスのラグ $s$ に対して対象であるが、相互相関係数については、次の関係が成り立つ。

$$(5.1) \quad C_{xy}(-s) = C_{yx}(s)$$

ここでは、基本的に Dow を $x$ とした $C_{xy}(s)$ を考える。

いま、Dow を $x_1, \dots, x_n$ , 対とする指標を $y_1, \dots, y_n$ としたとき、相互相関係数 $C_{xy}(s)$ は

$$(5.2) \quad C_{xy}(s) = \frac{\sum(x_t - \bar{x})(y_{t+s} - \bar{y})}{(n-s)SD_x SD_y}$$

で与えられる。ここで、 $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $SD_x$ ,  $SD_y$ はそれぞれ平均と標準偏差である。

実際の推定に当たっては、4.1節で記したように、ここでは Dow 基準の case2 のデータを用いた。また、同じ日付でも、次のような時間差がある点に留意しておきたい。

表 5.1 各国証券市場の取引時間

日本	0:00 ----- 6:00
香港	1:15 ----- 8:00
上海	1:30 ----- 7:00
ドイツ	7:00 ----- 21:00
イギリス	8:00 ----- 16:30
フランス	8:00 ----- 16:30
アメリカ	14:30 ----- 21:00

(夏時間の取引時間帯を協定世界時で示している)

### 5.2 Dow と各指標の日次変動率の相互相関係数

図 5.1～図 5.3 は Dow と各指標の日次変動率の相互相関係数を示している。SP につい

ては Dow との相関が強く，形はラグ±1 日を除いて Dirac のデルタ関数に近い。ラグ±1 日のわずかなマイナス相関は，4.1 節で述べた不規則成分の影響が考えられる。

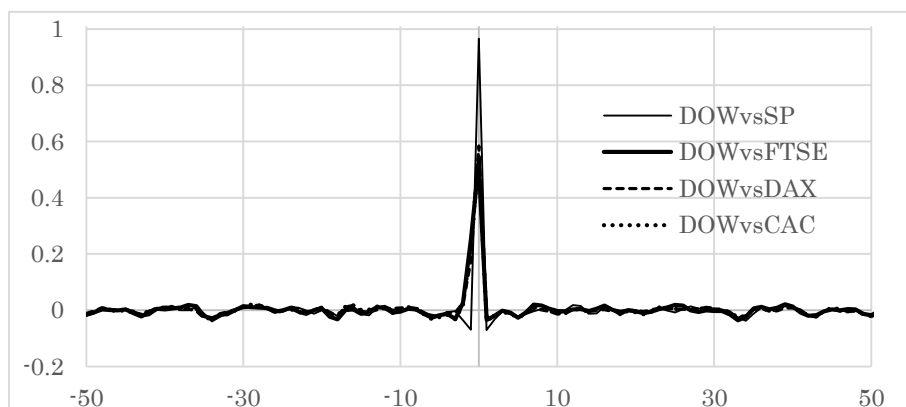


図 5.1 Dow と SP, FTSE, DAX および CAC 日次変動率の相互相関係数

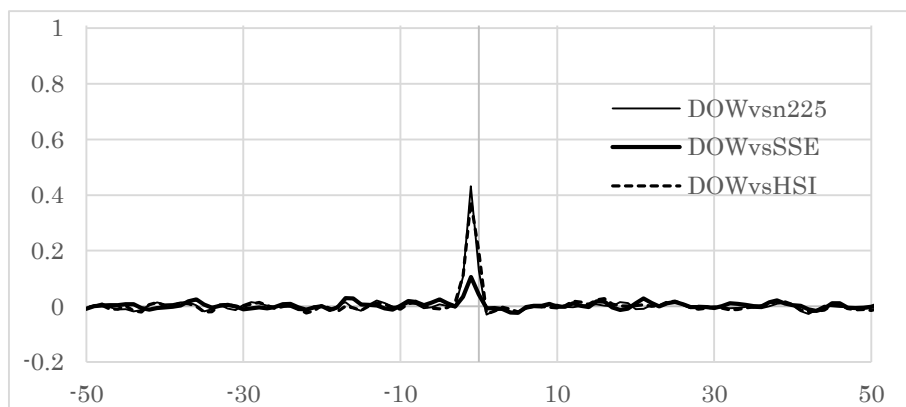


図 5.2 Dow と N225, SSE および HSI 日次変動率の相互相関係数

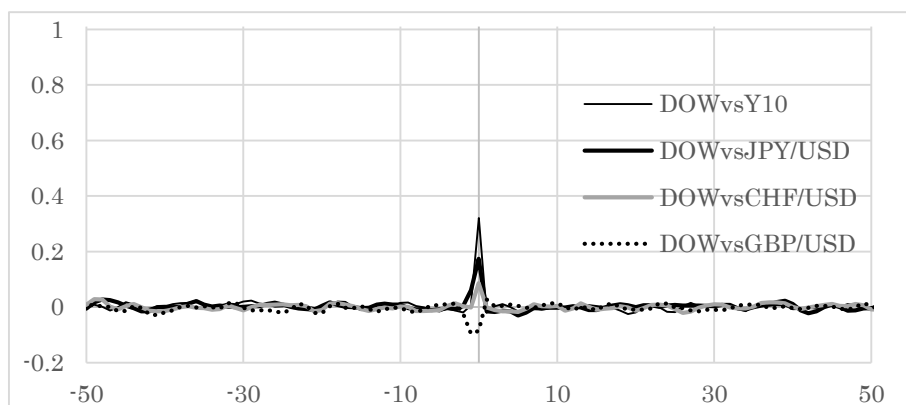


図 5.3 Dow と Y10, JPY/USD, CHF/USD および GBP/USD 日次変動率の相互相関係数

図 5.1～図 5.3 は，変動率そのものについて，互いに影響し合うような長期の記憶はないということを示している。これ以上の細かい関係は本研究の目的と直接には関わらない

が、興味深い点もあって、少し踏み込んでおきたい。

図 5.1 の FTSE, DAX, CAC の場合は、ラグ±1 日でわずかな非対称性が認められる。

表 5.2 ラグ-1 日, 0 日, 1 日における Dow と FTSE, DAX, CAC の相関係数

	ラグ		
	-1	0	1
DOW vs FTSE	0.25	0.52	-0.03
DOW vs DAX	0.18	0.58	-0.02
DOW vs CAC	0.23	0.55	-0.04

表 5.2 はラグ±1 日と 0 日の相関係数を示している。ここで、Dow vs FTSE のラグ-1 とは、前日の Dow と翌日のイギリスの相関であり、もっと言うと、アメリカ市場とそれから 11 時間経ったイギリス市場の関係である。同じく、Dow vs FTSE のラグ 0 は、イギリス市場とそこが閉まる 2 時間前に開いたアメリカ市場との関係、ラグ 1 はアメリカ市場とそれから 35 時間経ったイギリス市場の関係である。したがって、表 5.2 は次のことを示している。

- ✧ ヨーロッパ市場が閉まる少し前に開くアメリカ市場は、ヨーロッパ市場の影響をかなり受ける
- ✧ アメリカ市場が終わって 11 時間後に開くヨーロッパ市場がアメリカ市場から受ける影響は弱い

イギリスとアメリカの関係について、もう少し細かく示そう。図 5.4 は 1 か月ごとに推定した Dow と FTSE 日次変動率の相関係数を示している。概ね 0.4~0.8 の範囲で動きながら、平均して 0.5 程度の正相関を示している。

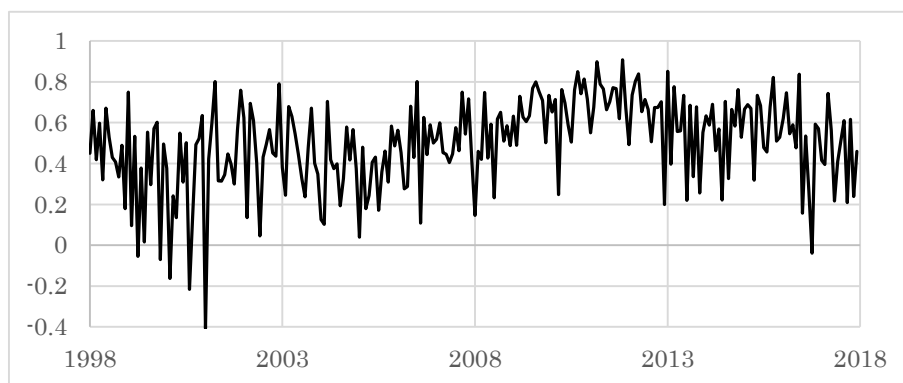


図 5.4 1 か月ごとに求めた Dow と FTSE 日次変動率の相関係数

アジアに関する図 5.2 では、ラグー1 日に低いピークが見られ、それ以外はほぼ相関していない。表 5.3 はラグー1 日, 0 日, 1 日の相関係数である。アメリカ市場とアジア市場の関係は、アメリカが閉まった 3~4.5 時間後に翌日のアジアが開き、アジアが閉まった後にヨーロッパ、次いでアメリカが開くという関係にある。したがって、表 5.3 は次のことを伝えている。

- ◇ アメリカ市場が閉まった数時間後に開く日本と香港はアメリカの影響を受けるが、上海はそれほど影響されない
- ◇ アジアが閉まった 6~8 時間後に開くアメリカ市場は、その日の日本と香港の動きと弱く相関するが、上海は相関しない

表 5.3 ラグー1 日, 0 日, 1 日における Dow と N225, SSE, HSI の相関係数

	ラグ		
	-1	0	1
DOW vs N225	0.43	0.13	-0.03
DOW vs SSE	0.11	0.04	-0.01
DOW vs HSI	0.38	0.20	-0.03

ただし、ここでも互いの関係はもっと短いスパンで変動している。図 5.5~図 5.7 はそれぞれ N225, SSE および HSI について、1 か月ごとに求めた前日の Dow 日次変動率との相関係数である。N225 については、2007 年を境として変化が見られるが、ここでこれ以上踏み込むのは難しい。SSE もリーマンショック後に少し相関が強まっているように見えるものの、なお全体に相関の水準は低く、市場としての特異性は大きくは変わっていない。香港は全体の弱い相関を示しており、2014 年以降はそれも弱まっている。

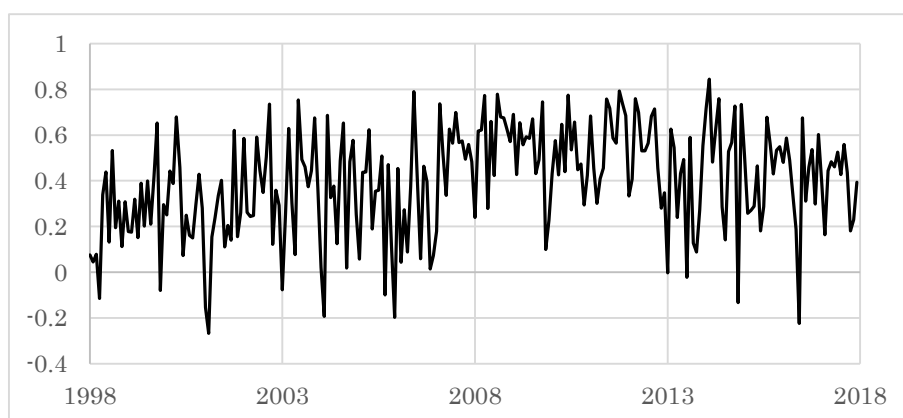


図 5.5 1 か月ごとに求めた Dow と N225 前日の日次変動率の相関係数

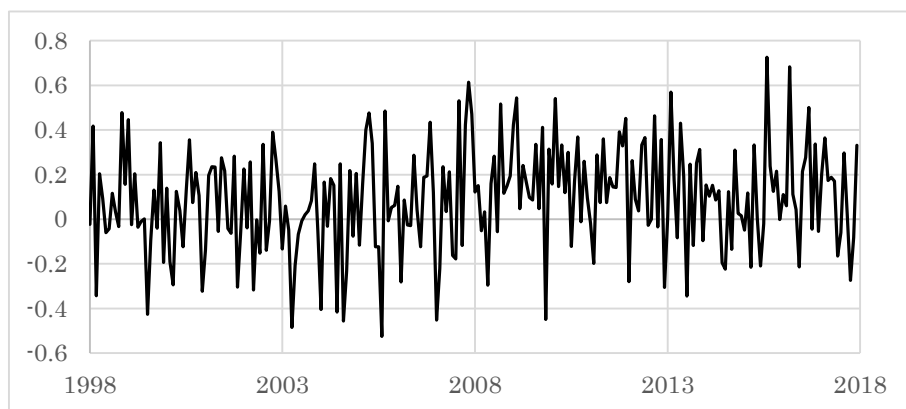


図 5.6 1 か月ごとに求めた Dow と SSE 前日の日次変動率の相関係数

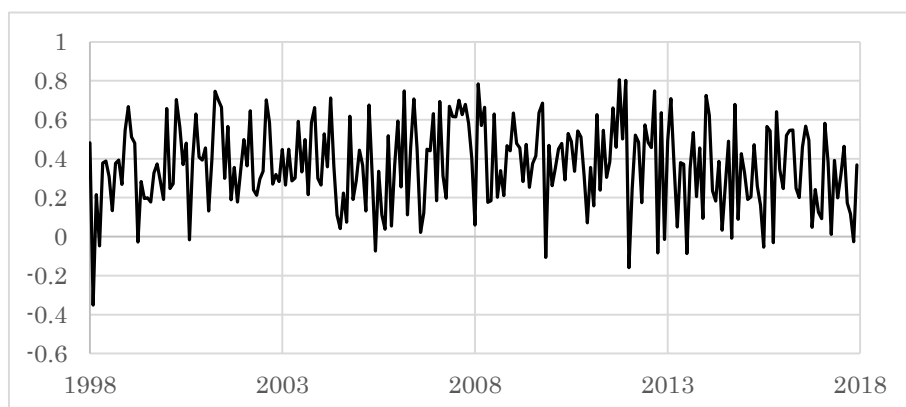


図 5.7 1 か月ごとに求めた Dow と HSI 前日の日次変動率の相関係数

表 5.4 は Dow と Y10 および為替レートの相関であり，Y10 のみが弱い正の相関を示している。一般論として，金利と株価は逆相関と見られるが，現実には「織り込み済み」というキーワードが示すように，理屈通りにはなっていない。

表 5.4 ラグ-1日，0日，1日における Dow と Y10，JPY/USD，CHF/USD および GBP/USD の相関係数

	ラグ		
	-1	0	1
DOW vs Y10	0.01	0.32	-0.02
DOW vs JPY/USD	0.06	0.17	-0.01
DOW vs CHF/USD	0.00	0.09	0.00
DOW vs GBP/USD	-0.10	-0.09	0.03

ただし，細かく見ると，Dow と Y10 の関係は単純ではない。図 5.8 は Dow と Y10 の 1 か月ごとに求めた相関係数であり，大まかに見れば無相関と正相関の時期に分かれている。

図 5.9, 図 5.10 に示した為替レートもそれぞれ個別の変化を示している。

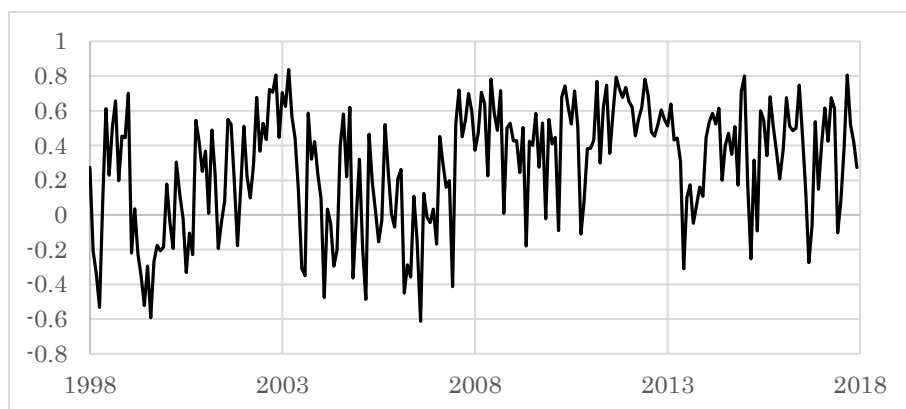


図 5.8 1 か月ごとに求めた Dow と Y10 日次変動の相関係数



図 5.9 1 か月ごとに求めた Dow と JPY/USD 日次変動率の相関係数

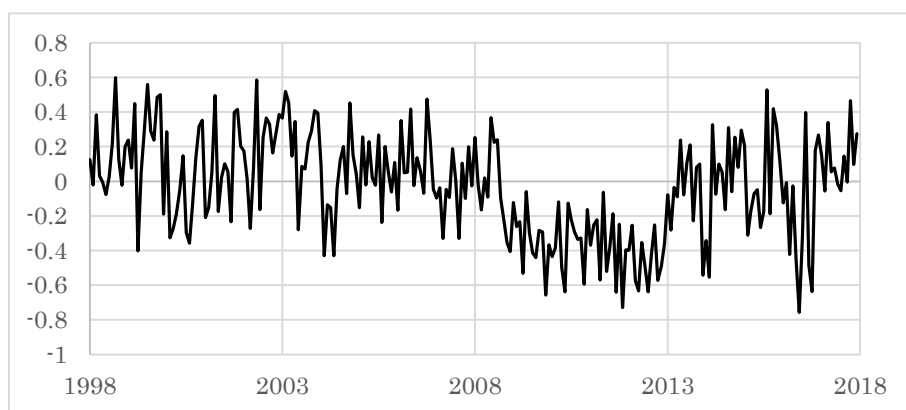


図 5.10 1 か月ごとに求めた Dow と GBP/USD 日次変動率の相関係数

### 5. 3 Dow と各指標の日次変動率絶対値の相互相関係数

次に、日次変動率絶対値の相互関係を示す。図 5.11 は Dow と SP, DAX および CAC 日次変動率絶対値の相互相関係数であり、左右ほぼ対称で、かつ、Dow の自己相関係数をき

わめて類似した緩和を示している。表 5.5 が推定した緩和時間と検定結果であり、いずれも有意差を示していない。したがって、アメリカとヨーロッパの株式市場には、きわめて共通した volatility の緩和過程が存在している。緩和時間は 65 日前後と推定される。

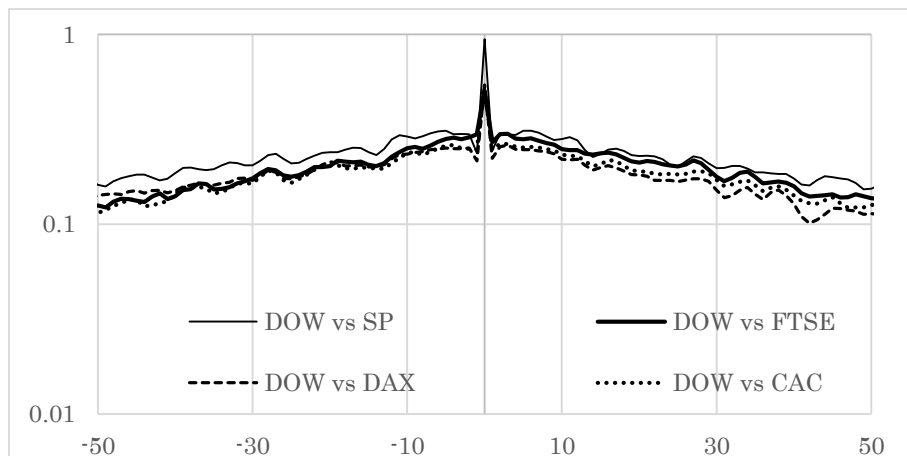


図 5.11 Dow と SP, FTSE, DAX および CAC 日次変動率絶対値の相互相関係数

表 5.5 ラグ-30~-5 日および 5~30 日の相互相関係数から推定した緩和時間と Dow の緩和時間との差の検定結果

	マイナス ラグ			プラス ラグ		
	$\tau$	95%	対 Dow	$\tau$	95%	対 Dow
DOW vs SP	65	55~79	ns	60	51~73	ns
DOW vs FTSE	60	51~72	ns	67	59~76	ns
DOW vs DAX	68	58~81	ns	55	50~62	ns
DOW vs CAC	66	55~83	ns	65	57~76	ns

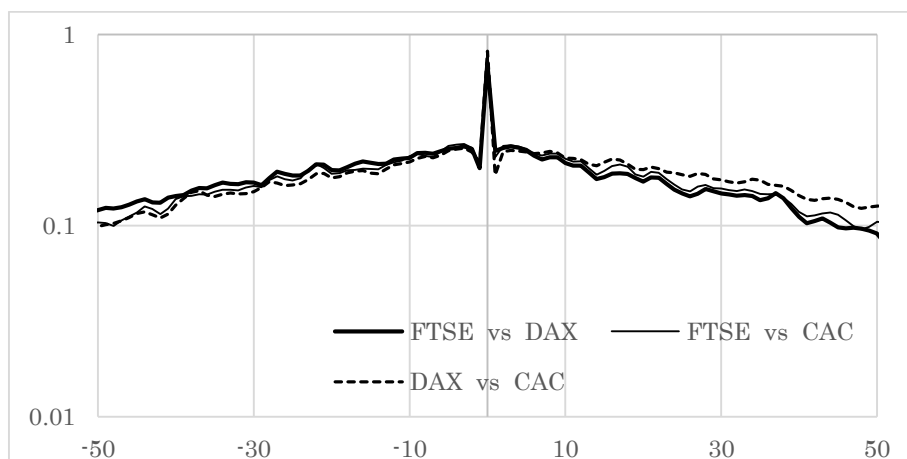


図 5.12 FTSE と DAX, CAC および DAX と CAC 日次変動率絶対値の相互相関係数



図 5.12 は、参考として FTSE と DAX および CAC, DAX と CAC の日次変動率絶対値の相互相関係数を示している。図 5.11 との違いは認められない。

図 5.13 は Dow とアジアの 3 指数との相互相関係数であり、表 5.6 が緩和時間を示している。N225 と HSI はマイナスラグで Dow と同じ緩和時間を示し、プラスでは N225 は短く、HSI は長くなっている。したがって、アジアからアメリカへの関係はヨーロッパからアメリカへの関係と類似しているが、逆は異なり、日本はより短い時間で減衰し、HSI はむしろ長引く傾向にある。すでに第 4 章の表 4.1 で N225 の緩和時間が Dow より有意に短いことを見た。これらの結果は、変動の激しさは各市場に伝播するが、日本市場はその減衰がアメリカやヨーロッパより速いことを示唆している。同じように、HSI の緩和は有意に長く、それが相互相関係数の緩やかな緩和をもたらしたものと考えられる。

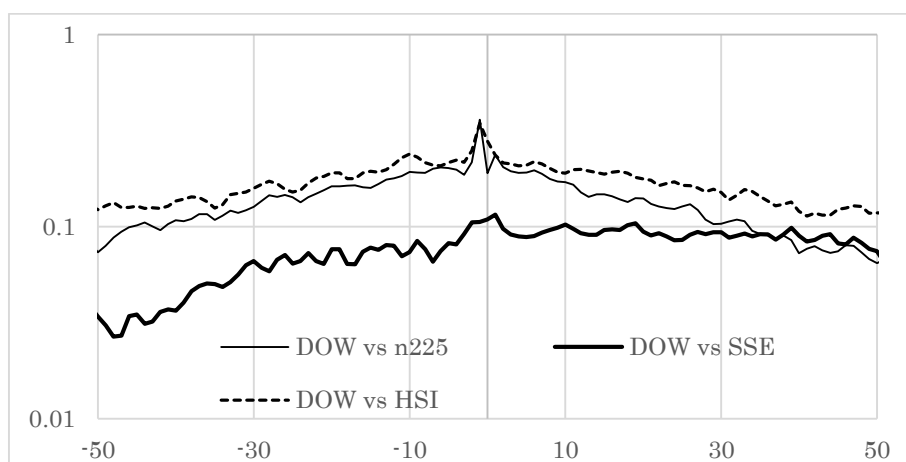


図 5.13 Dow と N225, SSE および HSI 日次変動率絶対値の相互相関係数

表 5.6 ラグ-30~-5 日および 5~30 日の相互相関係数から推定した緩和時間と Dow の緩和時間との差の検定結果

	マイナス ラグ			プラス ラグ		
	$\tau$	95%	対 Dow	$\tau$	95%	対 Dow
DOW vs n225	58	65~52	ns	44	40~50	**
DOW vs SSE	121	238~81	**	635	-	***
DOW vs HSI	67	85~55	ns	75	67~86	*

残る SSE はさらに緩和が長く、アメリカから中国へのインパクトはかなり長く持続している。ただし、プラスマイナスいずれも相関の水準が低く、他からの影響そのものが弱くなっている。

図 5.14 は参考までに示した N225 と SSE, HSI および SSE と HSI の相互相関係数であり、N225 と HSI の関係は欧米でのそれと類似し、上海は異なることが読み取れる。

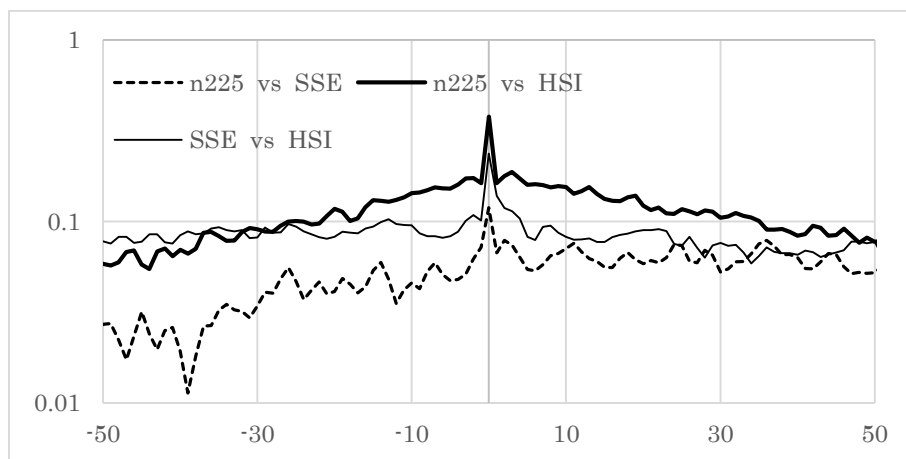


図 5.14 N225 と SSE および HSI, SSE と HSI の日次変動率絶対値の相互相関係数

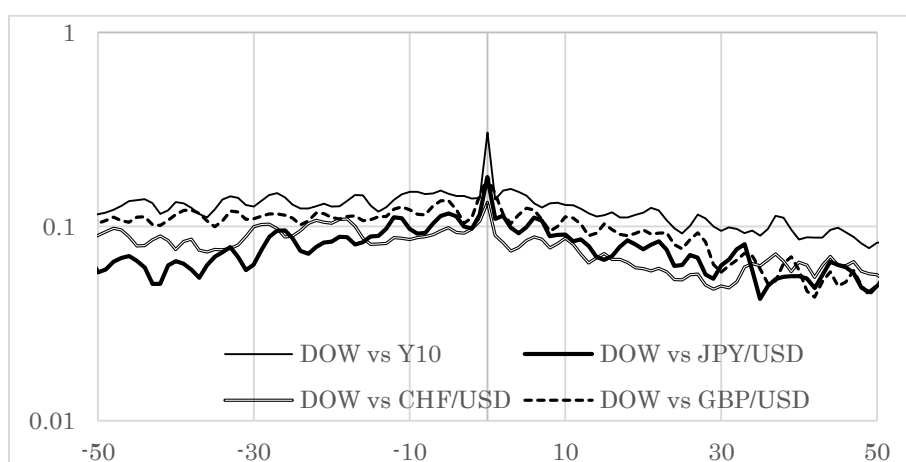


図 5.15 Dow と Y10, JPY/USD, CHF/USD および GBP/USD 日次変動率絶対値の相互相関係数

表 5.7 ラグ-30~-5 日および 5~30 日の相互相関係数から推定した緩和時間と Dow の緩和時間との差の検定結果

	マイナス ラグ			プラス ラグ		
	$\tau$	95%	対 Dow	$\tau$	95%	対 Dow
DOW vs Y10	219	1314~120	***	82	64~113	*
DOW vs JPY/USD	72	119~52	ns	50	39~69	ns
DOW vs CHF/USD	-	-	***	42	38~48	***
DOW vs GBP/USD	178	379~116	***	55	42~76	ns

図 5.15 は Dow と Y10 および為替レートとの相互相関係数であり、表 5.7 は緩和時間を示している。Dow と有意差を示さなかったのが Dow と JPY/USD との関係で、あとはマイナスラグで緩和が極めて遅くなっている。金利、円以外の為替レートともに自己相関係

数の緩和は Dow より遅いことから、これらは株価と関連しながら、それより遅い緩和過程を持っているものと思われる。

図 5.16 は Y10, JPY/USD, GBP/USD の相互相関係数であるが、相関の水準そのものが低く、何らかの緩和過程が見られるという以上の知見は難しい。

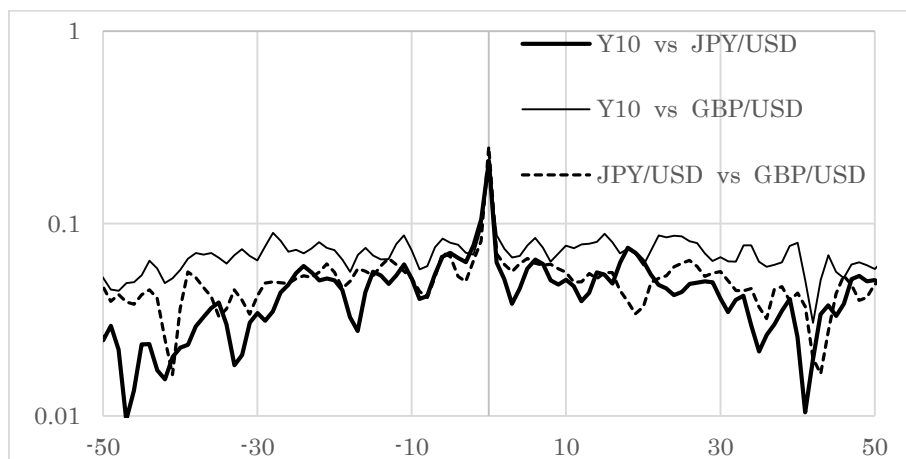


図 5.16 Y10 と JPY/USD, GBP/USD および JPY/USD と GBP/USD の相互相関係数

#### 5. 4 自己相関係数を求める VB プログラム

参考までに、相互相関係数を配列 `cxy()`, `cyx()` に求めるプログラムを以下に示す。

○メイン部

```
Dim x(10000) As Double 'データを格納する配列, サイズ 10000 は参考
Dim y(10000) As Double 'データを格納する配列, サイズ 10000 は参考
Dim ccxy(100) As Double '相互相関係数を格納する配列, 最大 100 は参考
Dim ccyx(100) As Double '相互相関係数を格納する配列, 最大 100 は参考
Dim mxlag As Double '最大ラグ
Dim nd As Integer 'データ数
```

```
mxlag = 100 '最大ラグを 100 に設定
```

```
'データを配列 x(), y() に, データ数を nd に設定する
```

```
Call hyojunka(nd, x()) 'データの標準化
```

```
Call hyojunka(nd, y()) 'データの標準化
```

```
Call cc_keisan(nd, mxlag, x(), y(), ccxy(), ccyx()) '相互相関係数計算
```

‘結果の出力

○相互相関係数計算

```
Sub cc_keisan(nd As Integer, x() As Double, y() As Double, mxlag As Integer,
              ccxy() As Double, ccyx() As Double)

  Dim ccxyw(101) As Double
  Dim ccyxw(101) As Double
  s = 0#
  For i = 1 To nd
    s = s + x(i) * y(i)
  Next
  ccxy(0) = s / nd
  ccyx(0) = ccxy(0)
  For lg = 1 To mxlag + 1
    sxy = 0#: syx = 0#
    For i = 1 To nd - lg
      sxy = sxy + x(i) * y(i + lg)
      syx = syx + x(i + lg) * y(i)
    Next
    ccxyw(lg) = sxy / (nd - lg)
    ccyxw(lg) = syx / (nd - lg)
  Next
  For lg = 2 To mxlag
    ccxy(lg) = (ccxyw(lg - 1) + 2 * ccxyw(lg) + ccxyw(lg + 1)) / 4
    ccyx(lg) = (ccyxw(lg - 1) + 2 * ccyxw(lg) + ccyxw(lg + 1)) / 4
  Next
  ccxy(1) = ccxyw(1)
  ccyx(1) = ccyxw(1)
End Sub
```

## 第6章 Volatility clustering とシステムティックリスク

### 6.1 定常とはほど遠い volatility 変化

図 6.1 は 1 か月ごとに求めた Dow と AXP 変動率の標準偏差，および 21 社の変動率標準偏差の中央値と上下四分位を示している。同じく，図 6.2 は 1 年ごとに推定した標準偏差である。

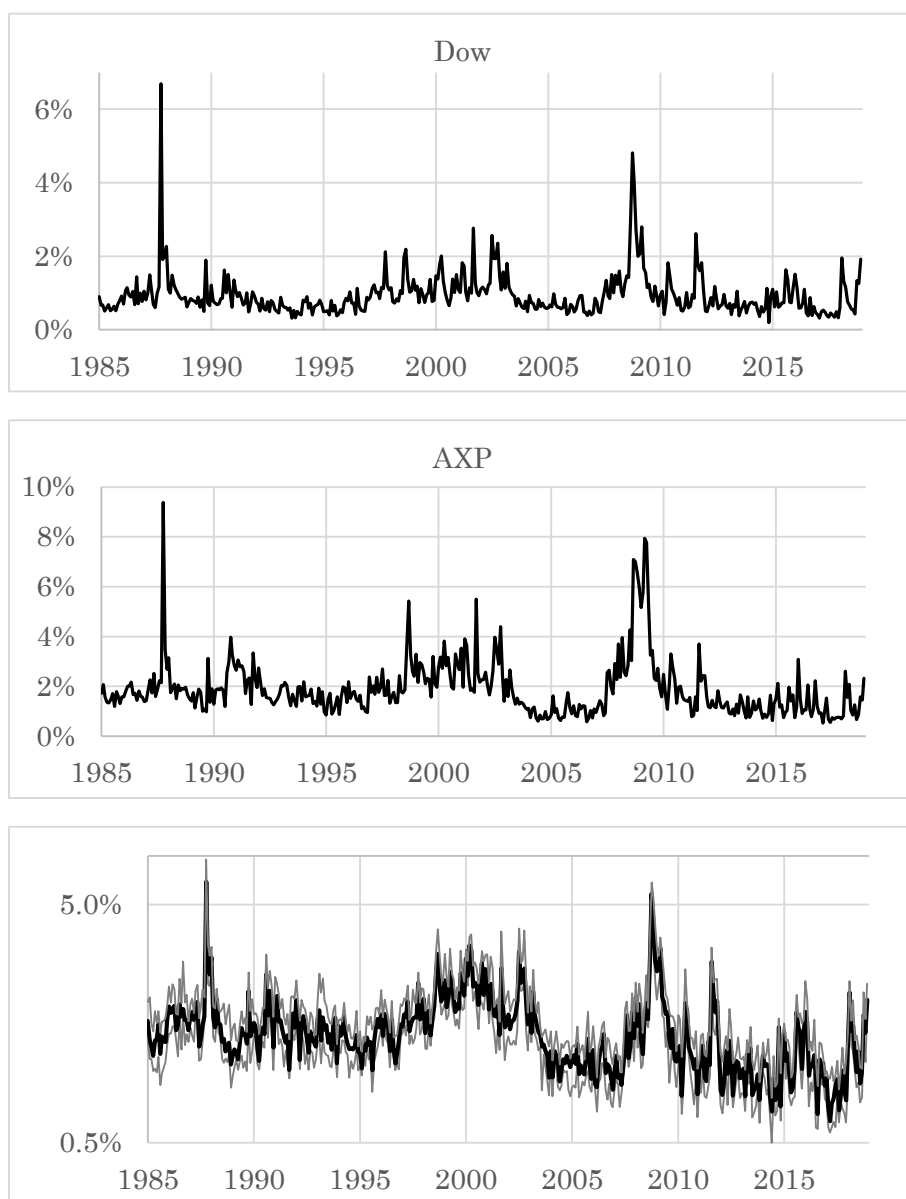


図 6.1 1 か月ごとに求めた Dow と AXP の日次変動率の標準偏差，および 21 社の 1 か月ごとの標準偏差の中央値と上下四分位（最下段のみ対数目盛）

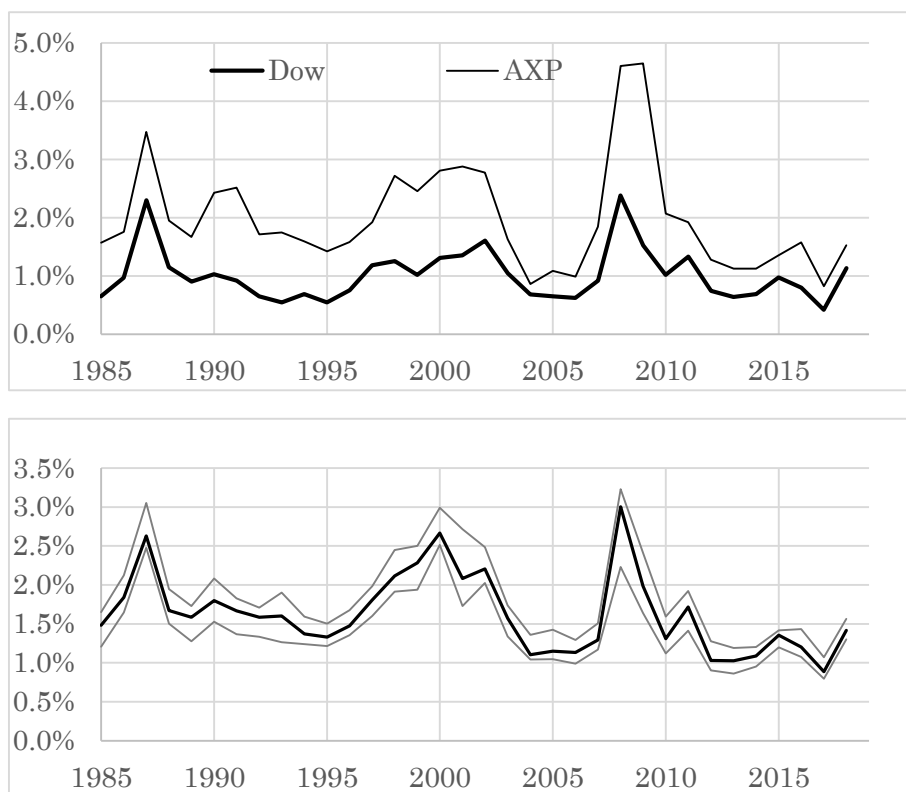


図 6.2 1年ごとに求めた Dow と AXP の日次変動率の標準偏差，および 21 社の 1年ごとの標準偏差の中央値と上下四分位

このグラフは次のことを示している。

- 1) 1か月単位で見た volatility は大きい変動幅を示し，1年単位でも定常とは程遠い変動を見せている
- 2) 21社の大半の volatility 変化はかなり狭いレンジに収まっている

1) については，株価が大きく変動したのはブラックマンデーや，IT バブル崩壊，リーマンショックなど景気が急落した時期が多く，volatility の動きが景気の動きとある程度整合している。キチンサイクルやジュグラーサイクルは 4年から 10年程度のスパンといわれており，このスケールでみると volatility は定常性を満たさないといえることができる。

なお，本研究が対象としている volatility clustering は緩和時間が 60~70日であって，ここで見ている景気の動きとは時間スケールが異なっている<sup>4</sup>。

<sup>4</sup> 本研究ではラグ 40日あたりまでの自己相関係数や相互相関係数しか対象としていないが，ラグが大きい領域では，もっと緩やかな緩和成分が観測される場合が少なくない。ただし，相関のレベルがきわめて小さく，結果が不安定であることから，本研究では触れなかった。

2) については、システマティックリスクが関わっている。節を改めて論じる。

## 6. 2 システマティックリスクと個別リスク

Dow はアメリカを代表する 30 社の株価を、株式分割を調整したうえで、単純平均した株式指数である。したがって、Dow は市場全体の動きを近似的に表すものと考えられる。また、採用されている 30 社はアメリカ産業の中心企業であるだけに、投資信託などさまざまなポートフォリオに組み込まれ、随時リバランスされることから、多かれ少なかれ似た動きをするものと考えられる。

図 6.3 は、3 か月ごとの日次変動率から推定した Dow と 21 社の相関係数の変化を示している。相関が弱いときで 0.3~0.4, 強いときで 0.7~0.8 であり、標準偏差の脈動とある程度整合した動きとなっている。

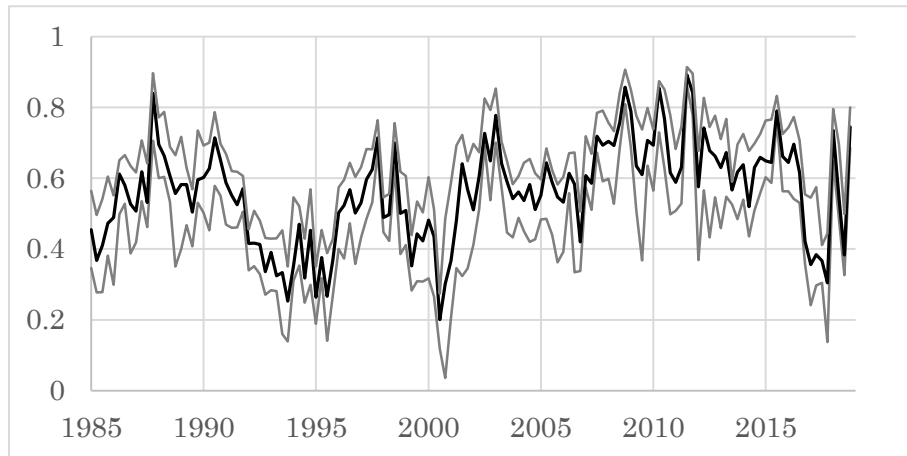


図 6.3 3 か月ごとの日次変動率から推定した Dow と 21 社の相関係数の中央値と上下四分位

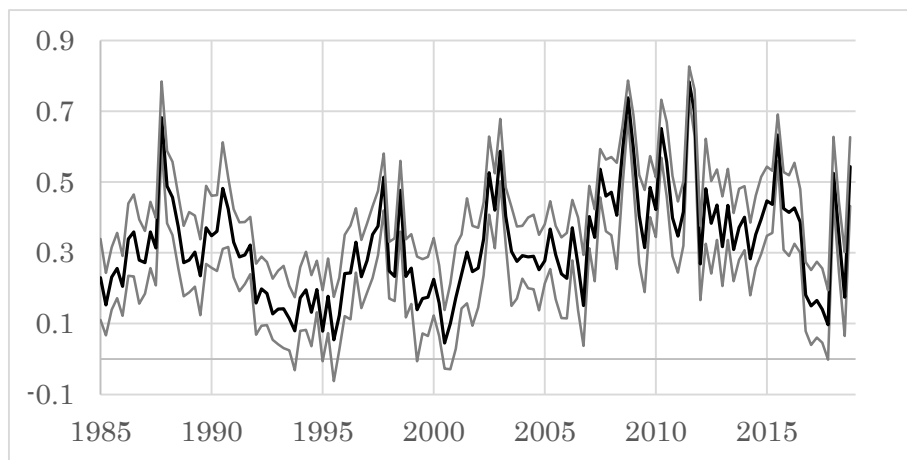


図 6.4 3 か月ごとの日次変動率から推定した 21 社相互の相関係数の中央値と上下四分位

図 6.4 は、21 銘柄のすべての組合せで 3 か月ごとに推定した相関係数の中央値と上下四分位である。基本的に Dow との相関係数と変わらない結果となっている。

以上のように、Dow と各銘柄の変動の相関係数および各銘柄同士の相関係数もまた volatility clustering に似た脈動を示している。この結果は、W.F.Sharpe が提唱したシステムティックリスクという視点から容易に理解される [23]。

いま、 $r_t$  を  $t$  日における個別銘柄の変動率、 $R_t$  を Dow 変動率として、この間に次の回帰式を想定する。

$$(6.1) \quad r_t = \beta R_t + c + \varepsilon_t$$

回帰係数  $\beta$  は Sharpe の  $\beta$  と呼ばれ、市場の動きに対するこの銘柄の敏感さを表している。最後の  $\varepsilon_t$  は、 $R_t$  とは独立なこの銘柄独自の變動である。分析の結果、この銘柄の平方和  $S_y$  は

$$(6.2) \quad S_y = S_r + S_e = \text{回帰} + \text{残差}$$

と回帰  $S_r$  と残差  $S_e$  に分けられ、それぞれ Dow の變動に比例した成分と個別の變動成分に対応する。ここでは、前者をシステムティックリスク、後者を個別リスクと呼ぶ。全變動に含まれるシステムティックリスクの割合は決定係数

$$(6.3) \quad CV = \frac{S_r}{S_y}$$

で与えられ、単回帰の場合、これは相関係数の 2 乗に等しい。図 6.5 が結果であり、0.1 から 0.7 という広い幅で變動することが分かる。

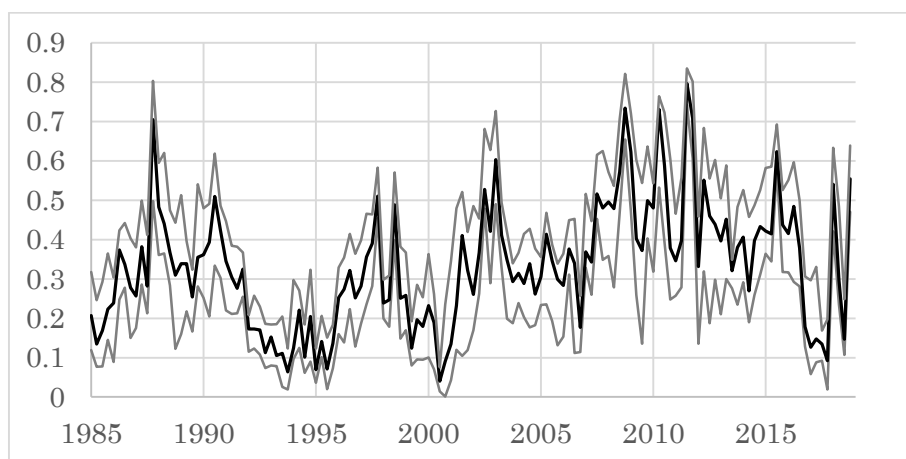


図 6.5 3 ヶ月ごとに推定した 21 社の決定係数の中央値と上下四分位

最後に、図 6.4 で示した個別銘柄間の相関係数の變動について触れておきたい。図 6.6 は 2 つの銘柄の変動を模式的に表している。銘柄 A と B の變動のうちのシステムティックリスクは共通した動きであり、図中の連動部分はほぼシステムティックリスクに等しく



なるはずである。さらに、相関係数は両銘柄の総変動（正確には、両銘柄の平方和の相乗平均）に占める連動部分の割合である。そして、volatility clustering で連動部分が伸縮すれば、相関係数も伸縮することになる。

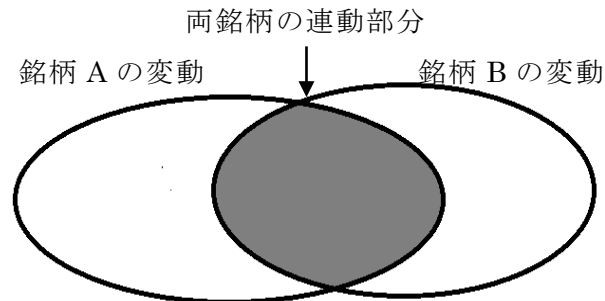


図 6.6 銘柄 A, B の変動の模式図

第 1 章において、ポートフォリオのリスクは構成銘柄の分散と相関係数に依存することを示した。Volatility clustering はこの両者ともを 60~70 日という緩和時間で脈動させるのであり、それは分散投資によるリスク抑制効果がこの時間スケールで大きく揺さぶられることを意味する。Volatility clustering は、リスク管理に限らず、分散投資、オプション理論など定常性を前提とした広範囲の金融理論に修正を迫る課題であることを強調しておきたい。

## 第7章 結論

まず各章の内容を簡単に振り返ると、第1章では代表的なリスク指標である VaR について、定常性と正規性が前提されていること、その根拠として日々の変動が不規則であり、中心極限定理が期待できることを示した上で、現実には fat tail によって正規性は成り立たないこと、volatility clustering によって定常性も成り立たないことを指摘した。さらに、fat tail は volatility clustering によってもたらされた現象であり、非正規性は非定常性の産物であることを示した。

第2章では、前章での指摘が古くから周知のことでありながら、その実証研究は精緻な時系列モデルの推定に集中しており、volatility clustering が生み出されるメカニズムの解明は足踏みしていることを指摘した。

第3章では、改めて自己相関係数という基本ツールに立ち返って、ダウ平均の volatility clustering が1次の緩和過程として捉え得ること、その検出には10年を超える時間スケールでの観察が必要であることを指摘した。また、近年の研究で自己相関係数がほとんど用いられない事情についても、かなり踏み込んだ考察を行った。

第4章では、Dow 平均のほか、主要国の株価指数や金利、為替レートなどについて、ごく一部を除いて、かなり明瞭な volatility clustering を示すこと、Dow と FTSE, DAX, CAC, さらにドル円とポンド円レートはほぼ同じ緩和時間を示すことを明らかにした。

第5章では、各指標の変動率絶対値について相互相関係数を求め、欧米の指標間では自己相関係数と同じ緩和過程が観察されることを見出した。これは、volatility clustering がグローバルなスケールで生み出された現象であることを明快に示している。また、緩和時間が異なった組合せの相互相関係数についても多くで1次の緩和過程が観察され、情報のリンクが確認された。アジア、ヨーロッパ、アメリカという時間差を伴った市場における情報の流れについても興味深い知見が得られた。

第6章では、volatility clustering による変動レベルの動きがきわめて大きく、定常性を前提としたリスク評価の妥当性は乏しいこと、volatility clustering はシステムティックリスクの特性であることから、個別銘柄の分散のみならず、銘柄間の相関係数をも脈動させることを明らかにした。つまり、ポートフォリオのリスクは、この2つの clustering によって揺さぶられるということである。これらの結果は、VaR に代表されるリスク評価のみならず、ポートフォリオ理論やオプション理論など広範な分野に大きい課題を投げかけていることを指摘した。

改めて、本研究の中でもっとも注目すべき成果は、第5章で明らかにした volatility clustering のグローバル性の検証と考えている。時系列分析の世界では多次元 GARCH などによる精緻な分析も行われているが、現象そのものは主要な市場でほぼ共通したシンプ

ルな緩和過程にほかならない。したがって、分析の精緻化よりデータの精緻化を通して、「どのようにして生み出された現象なのか」を明らかにする必要があるだろう。繰り返し指摘したとおり、非定常性も非正規性も **volatility clustering** によって生み出されている。その解明の延長上に、リスク評価理論やポートフォリオ理論などの修正が見通せるものと考ええる。

## おわりに

第7章で記したように、変動率絶対値の相互相関係数から異なる指標の相関構造を明らかにした点が、本研究の中核であると考えている。実際、第5章で示した分析結果は筆者の事前の予想を大きく超え、まさに世界は繋がっていることをまざまざと見せつけるものであった。

とはいえ、残された課題も山積している。喫緊の課題はデータの精緻化であり、もう少し短い区間でより明瞭に現象を捉えることが必要である。変動率ではなくレンジを用いるなどの方法が効果的ではないかと考えている。第6章の脚注に記したもう一つの緩和過程の存在も見逃せないテーマであり、これもデータの精緻化なしでは検証が難しい。また、リスク評価やポートフォリオ理論との関係もきちんと整理する必要がある。傾向として、株価が大きく下がる局面で *volatility* が急増することが多い。このとき、銘柄間の相関も強くなり、ポートフォリオのリスクは大きく高まることになる。つまり、好調な時期とショック時ではリスクが非対称ということであり、定常性を前提とした VaR は過小評価となり、ポートフォリオも非効率化している可能性がある。いずれも証券投資の世界で重要な問題であり、今後の進展が望まれる。

## 参考文献

- [1]西日本鉄道, 『第 179 期有価証券報告書』, 2019 年, <http://www.nishitetsu.co.jp/ir/>。
- [2]Mandelbrot, B., "The Variation of Certain Speculative Prices" *The Journal of Business*. 36, pp 394-419, 1963.
- [3]有浦義明, 『Excel でわかる市場・信用リスク管理』, 金融財政事情研究会, 1998 年。
- [4]小野寛, 『金融リスクマネジメント』, 東洋経済新報社, 2002 年。
- [5]汪毅, 「混合分布による VaR の推定」, 久留米大学大学院比較文化研究科修士論文, 2017 年。
- [6]渡辺敏明, 『ボラティリティ変動モデル』, 朝倉出版, 2000 年。
- [7]原田康平, 「Volatility Clustering と Fat Tails を考える」, 久留米大学産業経済研究, 46[2], pp157-169, 2005 年。
- [8] Markowitz, H.M., "Portfolio Selection", *Journal of Finance*, 7[1], pp77-91, 1952.
- [9]辰巳憲一, 『デリバティブと新金融商品の数学』, 東洋経済新報社, 1996 年。
- [10]日本銀行, 『時系列データ検索サイト』, <http://www.stat-search.boj.or.jp/>
- [11]全国銀行協会, 『各種統計資料』, <https://www.zenginkyo.or.jp/stats/>
- [12]Yahoo Finance, <https://finance.yahoo.com>
- [13]FRB, <https://www.federalreserve.gov/data.htm>
- [14]Ljung, G.M., Box, G.E.P., "On a Measure of a Lack of Fit in Time Series Models". *Biometrika*, 65, pp297-303, 1978.
- [15]植田康孝, 「AKB48 選抜総選挙におけるロングテール構造とメディア選択」, 江戸川大学紀要, 23, pp91-114, 2013 年。
- [16]Ding Z., Granger C.W.J., Engle R.F., "A long memory property of stock market returns and a new model", *Journal of Empirical Finance*, 1[1], pp83-106, 1993.
- [17]Ding Z., Granger C.W.J., "Modeling volatility persistence of speculative returns: A new approach", *Journal of Econometrics*, 74[1], pp185-215, 1996.
- [18]Rama Cont, "Volatility Clustering in Financial Markets: Empirical Facts and Agent-Based Models", in Gilles Teyssière, Alan P. Kirman (eds.), "Long Memory in Economics", pp289-309, Springer, 2005.
- [19]佐和隆光, 「マクロ計量モデルの有効性をめぐって」(竹内啓編, 『計量経済学の新展開』), 東京大学出版会, 1983 年。
- [20]原田康平, 『経済時系列分析再考』, 九州大学出版会, 1998 年。
- [21]ADVFN, <https://jp.advfn.com/fx/data-download>。

[22]Granger, G.W.J., "Spectral analysis of economic time series",

[23]Sharpe, W.F., "Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk", The Journal of Finance 19 [3], pp425-442, 1964.

## 謝辞

本研究を進めるに当たって、熱心なご指導をいただいた久留米大学大学院比較文化研究科の原田康平客員教授に深く感謝いたします。また、論文の作成に当たって適切な助言とご指導をいただいた久留米大学大学院比較文化研究科の譚康融教授と伊豆久教授に心より謝意を表します。