論　文

周期的研究開発投資を含むマクロ経済モデル

— Feichtinger & Sorger モデルのマクロ経済分析への応用 —

秋　本　耕　二

目　次

1. 序

本稿では，ある1つの研究グループの研究過程を考察した Feichtinger and Sorger [1988] に注目する．Feichtinger and Sorger [1988] の特徴は，基礎的研究開発と応用的研究開発を想定し，それぞれの研究開発に対する相対的な努力の投入方法に周期的挙動が存在することを示した点にあるが，ここではミクロ的な Feichtinger と Sorger のモデルをマクロ経済モデルに再構成する試みを行う．そして，マクロ経済における研究開発投資の周期的挙動の存在の可能性とその意味に関し若干の考察を行う．

研究開発投資（あるいはR＆D）に関する理論的なミクロ経済分析は，特にゲーム理論の発達とともに多くの成果が発表されてきた．この中には，Dasgupta, P., and J. Stiglitz [1980], Lee, T., and L.L. Wilde [1980], Loury, G.C. [1979] および Reinganum, J.F. [1981] などの先駆的業績がある．さらに，この他にも，たとえばMetcalfe, J. S. [1981] やIwai, K. [1984] に代表される進化経済学による分析等が報告されており，さまざまな視点より研究開発投資に関する理論的分析が数多くなされてきた．もち論，これらの分析の多くは研究開発投資に関する企業の戦略分析や，新技術や新製品の普及に焦点を当てた言わばミクロ経済的業績である．

一方，マクロ経済学においても，研究開発投資および技術革新が経済に及ぼす影響やその本質的意味に関し，さまざまな視点より考察が行なわれてきた．もち論，これらの中には巨視的なマクロ経済分析を含むが，その一方で，Pasinetti. L.L. [1981] やGoodwin, R.M. [1986] のように多部門分析を駆使しつつ，マクロ経済の主要な問題（たとえば所得分配や経済変動）と技術革新の経済学的意義を考察した優れたモデルが存在する．

このように，研究開発投資や技術革新に関する理論的分析を概観すると，ミクロ経済分析とマクロ経済分析の間に理論的間隙が存在することがわかる．したがって，言わばミクロ経済学からマクロ経済学への理論的橋渡しが必要となる．すなわち，ミクロ経済学の理論的帰結がマクロ経済にいかに取り込まれ，マクロ経済理論の中で進化していくのかが問題となる．たとえば，ミクロ的な企業の研究開発投資はマクロ的にどのようなシステムの中でいかにファイナンスされるのか等である．したがって，研究開発に関するミクロ経済分析が，マクロ経済構造の中で再構築され，ミクロ的な研究開発投資理論とマクロ的な技術革新の理論の相互関係を明らかにすることが望まれる．

このような視点に立ち，本稿では Feichtinger and Sorger [1988] に注目する．

前述のように，Feichtinger and Sorger［1988］は基礎的研究開発，応用的研究開発およびその周期的挙動を含んでいるのが特徴である．「企業にとっては即戦力として機能し難い基礎的研究開発，しかし基礎的研究開発なしでは応用的研究開発は存続しえず，企業の存続基盤自体が脅かされる」というミクロ経済的状況が生み出す研究開発投資の周期的挙動をいかにマクロ経済学的に解釈するのかが本稿の目的である．

本章に続く第2章ではFeichtinger and Sorger［1988］を紹介し，その特徴について考察する．また，第3章では，Feichtinger and Sorger［1988］をマクロ経済モデルに変更するための経済学的背景を説明する．そして，これに準じてマクロ経済モデルを構成して，これを分析する．ただし，分析そのものはFeichtinger and Sorger［1988］を用いて，これを紹介する．そして，さらに第3章では，さまざまなマクロ経済的要因を取り入れ，周期的挙動を示す研究開発投資に関するマクロ経済分析の可能性について考察する．

2．Feichtinger & Sorgerのモデル

2.1 モデル

Feichtinger and Sorger［1988］で示されたモデルを紹介しよう．まず，研究開発を行うある研究グループを考える．研究開発を行う上で，このグループは常に2種類のタイプの研究開発に直面する．すなわち，基礎的知識を蓄積する基礎的研究開発と蓄積された基礎的知識を用いて新技術や新製品の開発を行う応用的研究開発である．もちろん，応用的研究開発は基礎的知識の存在がなければ実行することはできない．しかし，基礎的知識の蓄積のみでは，このグループは研究開発から利益を得ることはできない．すなわち，応用的研究開発による知識の実用化のみが研究グループに利益をもたらすのである．したがって，研究グループ

は自らが保有する資源をどちらのタイプの研究開発に投入するのかを意思決定しなくてはならない．

この研究グループが持つ資源は研究開発に費やす時間あるいは努力であるとする．そして，この資源のうち，時間 t において基礎的研究開発に費やす割合を $y(=y(t))$ で，応用的研究開発に費やす割合を $1-y$ で表す．さらに，時間 t において蓄積されている基礎的知識量を $z(=z(t))$ で表し，努力率 y によりもたらされる基礎的知識は $f(y)$ で表されるものとする．ただし，$f(y)>0$，$f'(y)>0$ $(y>0)$，$f''(y)\geq 0$ $(y\geq 0)$，$f(0)=0$，$f(1)<\infty$ とする．このとき，基礎的知識量は，

$$\dot{z}=f(y)-\beta(1-y)-\alpha z$$

にしたがう．ここで，定数 $\alpha(>0)$ は基礎的知識が劣化する率を表す．すなわち，任意の時間において基礎的知識は α という率で旧式のものとなり，この部分は基礎的知識から離脱する．定数 β は，努力率 $1-y$ で応用的研究開発が行われたとき，基礎的知識が減少する量を示す．ただし，ここでは簡単化のため $\beta=1$ とおく．したがって，基礎的知識量は，

$$\dot{z}=f(y)-(1-y)-\alpha z \qquad (1)$$

にしたがう．

努力率 y は研究グループの意思決定にしたがうが，ここでは努力率 y をコントロールする変数 u を考え，

$$\dot{y}=u \qquad (2)$$

とおく．すなわち，コントロール変数 u をとおして，基礎的研究開発への努力率と応用的研究開発への努力率を制御するものとする．そして，コントロール u を用いて，努力率 y を制御するとき，費用 $\left(\dfrac{c}{2}\right)u^2$ が発生するものとする．費用

$\left(\frac{c}{2}\right)u^2$ は研究開発を行う上での調整費用と考える．ただし，費用 $\left(\frac{c}{2}\right)u^2$ が発生する一方で，(2)で定まる応用的研究開発努力率 $1-y$ に対応して，研究グループは利益 $\pi(1-y)$ を獲得するものとする．利益を構成する $\pi(>0)$ は定数である．

以上，基礎的研究開発と応用的研究開発を同時に行う研究開発グループについて説明したが，このような状況のもとで研究開発グループは次の問題に直面する．

$$\max_u \int_0^\infty e^{-rt}\left\{\pi(1-y)-\left(\frac{c}{2}\right)u^2\right\}dt \tag{3}$$
$$\text{s.t.}\ (1),\ (2),\ z\geq 0,\ z(0)=z_0,\ y(0)=y_0,\ 0\leq y\leq 1.$$

ただし，r は時間割引率を表す．

2.2 モデルの特徴

問題(3)の特徴を考察しよう．研究開発投資に関する先駆的かつ基礎的文献としては，たとえば Loury [1979]，Dasgupta and Stiglitz [1980]，Lee and Wilde [1980]，Reinganum [1981] などをあげることができる．これらは，いずれもゲーム理論的接近を試みた研究であるが，Feichtinger and Sorger [1988] のモデルとは基本的に相違する点を多く含んでいる．そこで，Feichtinger and Sorger [1988] と同様に制御問題としてモデルを定式化している Reinganum [1981] と比較しつつ，Feichtinger and Sorger [1988] の特徴について考察する．

まず，Reinganum [1981] のモデルの基礎的部分を簡単に紹介しよう．想定されているのはある寡占市場において1つの研究開発をめぐって競合する2つの企業（以下，これらを企業1，企業2とよぶ）である．そして，各企業の問題を次のように定義する．すなわち，

$$\max_{u_i} J^i(u_1, u_2) \qquad (※)$$
$$\text{s.t.} \quad \dot{z}_i = u_i,\ z_j(0) = 0,\ (i,\ j = 1,\ 2\ ;\ i \neq j)$$

である[1)]. ここで,

$$J^i(u_1, u_2) = \int_0^T \left[Ve^{-\lambda(z_1(t)+z_2(t))} \lambda u_i(t) - e^{-rt} e^{-\lambda(z_1(t)+z_2(t))} \frac{1}{2} u_i(t)^2 \right] dt$$

である. 定数 V は研究開発が成功した場合の利益である. 定数 V に掛けられている $e^{-\lambda(z_1(t)+z_2(t))}\lambda u_i$ は研究開発の成功確率を表す. すなわち, 企業 i の研究開発知識の蓄積 $z_i(t)$ と研究開発の成功を表す確率変数 τ_i に対応し, 時間 t までに企業 i が研究開発に成功する確率を

$$P(\tau_i \leq t) = 1 - e^{-\lambda z_i(t)} \qquad (\lambda \text{ は正の定数})$$

で表し, 時間区間 $(t,\ t+dt]$ において企業 i が研究開発に成功する条件付確率を

$$P\{\tau_i \in (t,\ t+dt] \mid \tau_i > t\} = \lambda u_i(t)dt + o(dt)$$

と計算する.

このとき, 企業 i が時間区間 $(t,\ t+dt]$ において研究開発ゲームの勝利者となり, 収益 V を獲得する確率は $e^{-\lambda z_1(t)} e^{-\lambda z_2(t)} \lambda u_i dt = e^{-\lambda(z_1(t)+z_2(t))} \lambda u_i dt$ となる. そして, 時間 t までに企業 i が費用 $c_i(u_i) = \frac{1}{2}u_i^2$ を払い続けなくてはならない確率は $P(\tau_1 \geq t)P(\tau_2 \geq t) = e^{-\lambda(z_1(t)+z_2(t))}$ と計算される. また, T は研究開発終了時間を, r は時間割引率をそれぞれ表す.

問題(3)と問題（※）において第1に指摘されるのは, Reinganum [1981] は

1) 正確には, Reinganum [1981] は非協力ゲームを考えているので, 次の条件を満足する各企業の戦略の組 $(u_1^*,\ u_2^*)$ を考えなくてはならない.

(i) $J^1(u_1^*, u_2^*) \geq J^1(u_1, u_2^*), \quad \forall u_1 \in U_1,$

(ii) $J^2(u_1^*, u_2^*) \geq J^2(u_1^*, u_2), \quad \forall u_2 \in U_2,$

である. U_i は企業 i の戦略空間を表す.

ゲーム理論による寡占市場の経済モデルであるのに対し，Feichtinger and Sorger [1988] は単独の一意思決定者の問題としてモデルが構成されているという点である．すなわち，後者はある1つの研究グループの問題であり，市場の形態のみならず，研究グループを取り巻く経済的環境は分析の視野の外に置かれている．したがって，経済学的解釈において，後者はさらに考察される余地を残す．この点については次章で詳しく考察する．

第2の相違点は，コントロール変数の設定にある．すなわち，Reinganum [1981] では，資源の投入に費用がかかるものの，使用できる資源に制約がない．これに対し，Feichtinger and Sorger [1988] では，使用可能な資源に制約があり，この制約のもとで資源は基礎的研究開発か応用的研究開発のいずれかに投入される．そして，そのために発生する最も重要な相違点は，Reinganum [1981] では意思決定者が研究開発の知識量を制約なしに直接コントロールしているのに対し，Feichtinger and Sorger [1988] では意思決定者がある制約のもとで（基礎的研究開発と応用的研究開発の間の資源の配分率を通して）間接的に知識量をコントロールしているという点である．そのために，前者の状態方程式は1本であるのに対し（(※）式の $\dot{z}_i = u$)，後者は(1)および(2)で示される2本の状態方程式を含んでいる．その結果として，コントロールに関し両者の間に決定的な相違が発生する．すなわち，前者では知識量の経路は単調に推移するが(Reinganum [1981] p.35，あるいは秋本 [2001] p.38 を参照せよ)，後者では，次節で示すように，知識量は周期的ふるまいを示す．ただし，コントロールの手法に関しては，通常は Reinganum [1981] のように，研究開発を行う主体が直接的に知識量をコントロールすると考える方が自然である．したがって，Feichtinger and Sorger [1988] のモデルに関しては，研究グループが研究開発の主体であるのにも関わらず，研究開発に関する知識を間接的にしかコントロールできないという点に若干の不自然さを残す．この点については，さらなる経済

学的説明が必要となる．これらのことを含め，間接的コントロールが持つ経済学的可能性について次章で考察する．

3．マクロ経済への応用

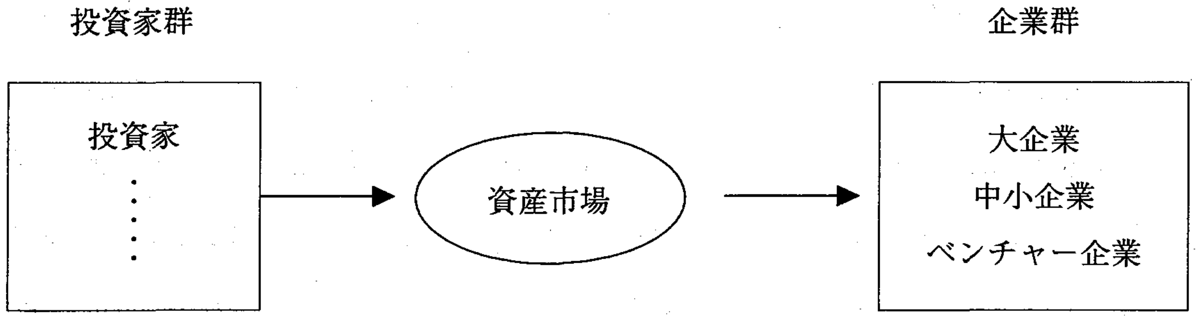
3.1 マクロ経済モデル

ここでは，Feichtinger and Sorger [1988] に経済学的な解釈を与えるために，Feichtinger and Sorger [1988] のマクロ経済への応用を考える．ただし，モデルは Feichtinger and Sorger [1988] をそのまま用いる．

図1に，マクロ経済におけるマネーの還流の中で，投資家が資産市場を通して企業群に投資を行う過程を示す．われわれがこの過程の中で注目するのは研究開発に投資されるマネーである．図1の左方には研究開発に投資しようとする投資家群が，右方には研究開発を実行する企業群が配置されている．すなわち，投資家群が企業群の研究開発に関わる情報を市場等を通して入手し，この情報に基づいて企業群の研究開発に投資するという過程に注目する．

まず，企業群について考えよう．企業群の中には大企業や中小の企業に加え，研究開発に自らの存立をかけるベンチャー企業も含まれる．ここでは，これらの企業が実行する研究開発に注目する．企業群には，基礎的研究開発を行い，特許

図1　研究開発投資のマクロ経済図



を取得して，膨大なライセンス料の取得を目指す企業も存在するが，その一方で，基礎的研究開発による知識を用いて実用化に向けた応用的研究開発を行い，巨額の利益を確保しようとする企業も存在しよう．もち論，その両方タイプの研究開発を同時に進行させる企業もあろう．そして，このような状況をマクロ経済的視点より観察すると，基礎的研究開発と応用的研究開発が同時に渾然一体となって進行している経済を読み取ることができる．すなわち，これらの企業の総体が研究開発の主体をマクロ経済の中で形成していると解釈する．

一方，投資家群は，経済全体における技術革新の動向および企業群の研究開発の実体を観察し，投資すべき企業を選択する．そして，大別すると，成功すれば巨額のライセンス料をもたらす基礎的研究開発と新製品や新技術の開発により利益を作り出す応用的研究開発の両者が投資対象の視野に入っていると考えられる．投資家は，研究開発に関する情報を市場等を通して入手し，さまざまな研究開発に市場を通して投資する．もち論，それぞれの時点において個々の投資家が（したがって投資家群全体が）投資できるマネーの額には限界がある．そして，このような状況をマクロ経済的視点から見ると，基礎的研究開発あるいは応用的研究開発を実行する企業群の総体に対し，限られたマネーを市場を通して投資家群が供給するという構図を描くことができる．

このような構図のもとで，Feichtinger and Sorger [1988] のモデルをマクロ経済に応用する．まず，投資家群全体が任意の時間 t において一定のマネー a (単位は円でもよい) を保有しているものとする．いまそれを簡単化のため $a = 1$ とする．投資家群はこの限られたマネーを基礎的研究開発あるいは応用的研究開発に投資する．そこで，時間 t において基礎的研究開発に投資されるマネーを $y(=y(t))$ で，応用的研究開発に投資されるマネーを $1-y$ で表す．ただし，いまは簡単化のため各時点におけるマネーの保有残高を $a = 1$ とおいているので，y および $1-y$ を基礎的研究開発および応用的研究開発に投資される割合と解釈

してもよい．さらに，時間 t において蓄積されている基礎的知識量を $z(=z(t))$ で表し，投資 y によりもたらされる基礎的知識は $f(y)$ で表されるものとする．ただし，$f(y)>0$，$f'(y)>0$（$y>0$），$f''(y)\geq 0$（$y\geq 0$），$f(0)=0$，$f(1)<\infty$ とする（図 2 を参照せよ）．このとき，基礎的知識量 z は，

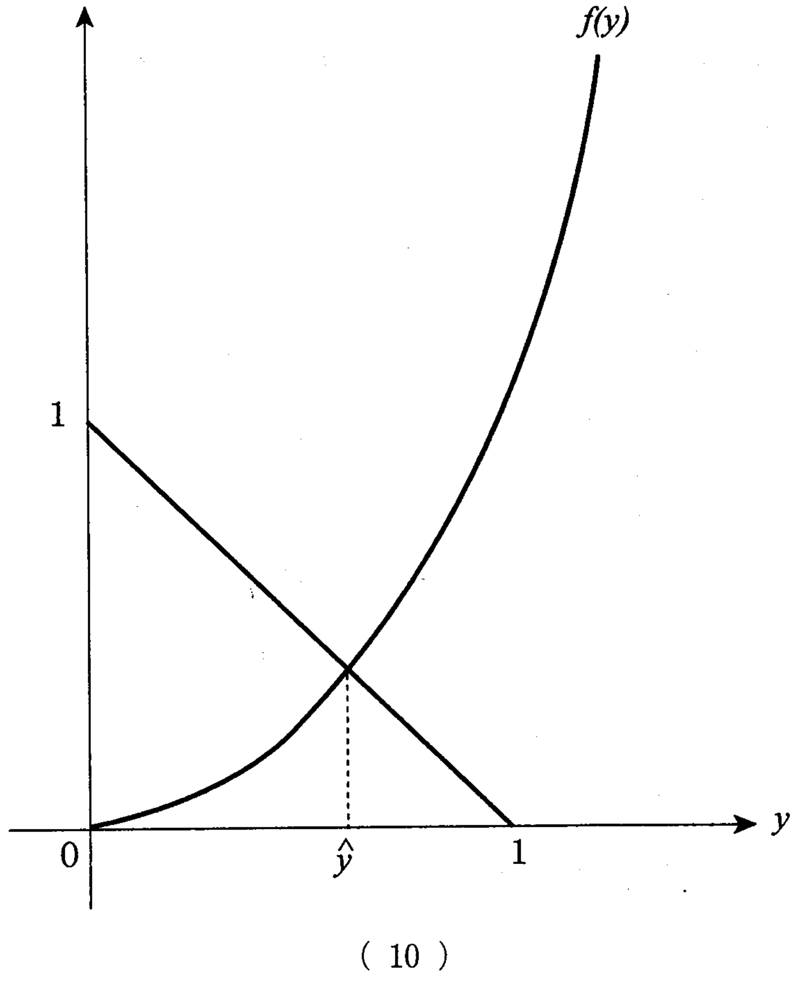
$$\dot{z}=f(y)-\beta(1-y)-\alpha z$$

にしたがう．ここで，定数 $\alpha(>0)$ は基礎的知識が劣化する率を表す．定数 $\beta(>0)$ は，応用的研究開発に 1 単位が投資されたとき，基礎的知識の減少する量を示す．ただし，ここでは簡単化のため $\beta=1$ とおく．したがって，基礎的知識量 z は，

$$\dot{z}=f(y)-(1-y)-\alpha z \qquad (4)$$

にしたがう．

図 2　$f(y)$ のグラフ



さて，問題は知識量zのコントロール方法である．投資yは投資家群の意思決定にしたがう．ただし，ここでは投資家群は直接的に投資yをコントロールし，これによって研究開発の基礎的知識量zをコントロールできるとは考えない．すなわち，もう一つのコントロール変数uを考え，

$$\dot{y} = u \tag{5}$$

とおいて，間接的に投資yを通して基礎的知識量zを制御するものとする．すなわち，基礎的知識量zを制御する過程において，yを直接的なコントロール変数とせず，yをコントロール変数uの従属変数としてモデルを構成する．

この制御構造が持つ経済学的意味を理解することは重要である．たとえば，現実的には，投資家は直接的に企業の意思決定に参加することはできない．すなわち，投資家群は市場を通して間接的に企業群と結ばれている．もち論，投資家群は企業群の研究開発に関する情報を参照しつつ投資するのであるが，投資家は基本的に企業群の研究開発の動向を市場を通じてしかコントロールできないのである．そこで，ここでは投資家群は，市場を介した投資という行為により，研究開発の方向性を間接的にコントロールすることができると解釈する．たとえば，企業群側の資金調達がエクイティー・ファイナンスであれば，有望な研究開発投資には株価の上昇というシグナルでコントロールの結果が示されるかもしれない．あるいは，社債の発行で研究開発資金を調達するのであれば，有望な研究開発に対しては低い金利が市場で成立するであろう．そして，投資家群は，このようなシグナルを観察しつつ，市場を介して(5)で投資yを制御すると解釈する．投資の動向を反映するのは資産市場の動向であり，資産市場の動向を見極めつつ，投資をコントロールしていると考える．すなわち，投資主体が直接的に研究開発に関与できないというマクロ経済的構図が(5)を通して(4)を制御するという構造を生み出していると想定する．

このような環境のもとで，投資家群は，コントロール変数uを通して，基礎的研究開発と応用的研究開発への投資を制御し，そのことで遠隔的に研究開発の基礎的知識量を制御するのであるが，市場を通して間接的にコントロールを行っているために，ここでは，コントロールuに対し，制御に対する費用$\left(\frac{c}{2}\right)u^2$が発生するものとする．費用$\left(\frac{c}{2}\right)u^2$は投資の方向性を変更する上で市場で発生する調整費用と考える．すなわち，この調整費用は投資先を変更する上での損失あるいは手数料等と解釈する．

調整費用$\left(\frac{c}{2}\right)u^2$が発生する一方で，(5)で定まる応用的研究開発の努力率$1-y$に対応して，投資家群は利益$\pi(1-y)$を獲得するものとする．利益を構成する$\pi(>0)$は定数である．もち論，ミクロ的には，基礎的研究開発投資に関しても株価の値上がり等により，投資家が利益を獲得することもありうるが，ここでは，マクロ的視点に立ち，基礎的研究開発は応用的研究開発に連動し，実体経済において，応用的研究開発によりその成果と価値を具現化すると考える．

以上，基礎的研究開発と応用的研究開発の両方を視野に入れた投資家群について説明したが，このような状況のもとでは投資家群は次の問題に直面する．すなわち，

$$\max_u \int_0^\infty e^{-rt}\left\{\pi(1-y)-\left(\frac{c}{2}\right)u^2\right\}dt \tag{6}$$

$$\text{s.t.}\quad (4),\ (5),\ z\geq 0,\ z(0)=z_0,\ y(0)=y_0,\ 0\leq y\leq 1,$$

である．ただし，rは時間割引率を表す．

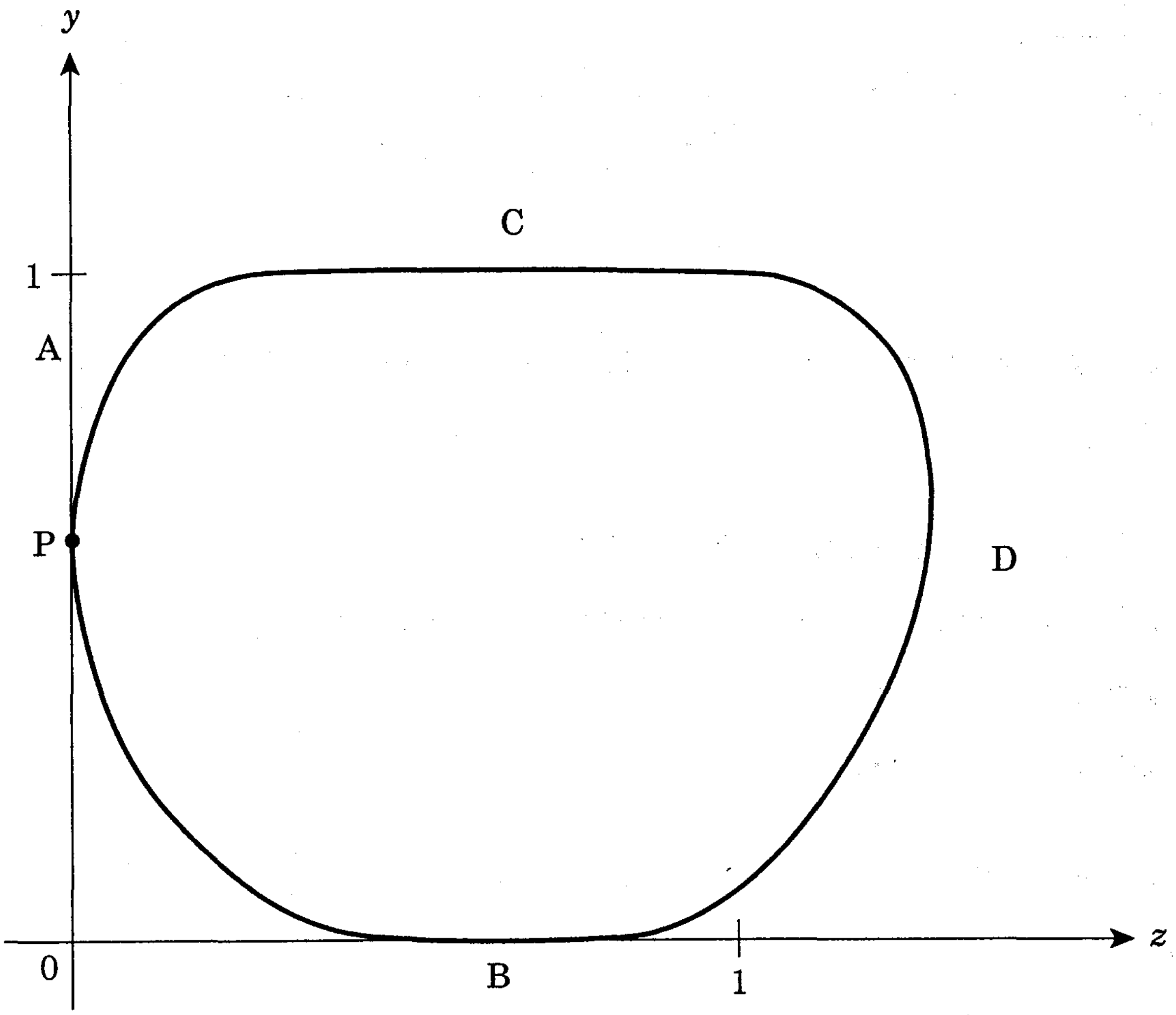
3.2 Feichtinger & Sorger の分析

ここでは，Feichtinger and Sorger [1988] の問題(6)に関する分析を紹介する．Feichtinger and Sorger [1988] に対する新たな分析は加えられていない．

問題(6)は2本の状態方程式(4)および(5)を含んでいる．変数は，zとyであ

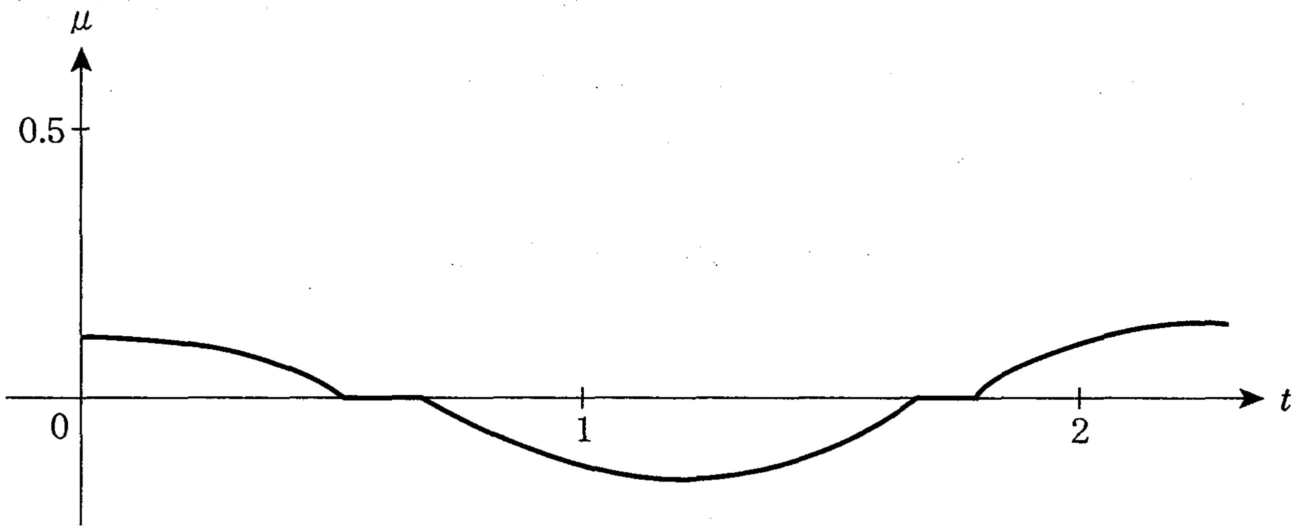
る．そして，結論を先取りすれば，z と y に関し周期的ふるまいを示す問題(6)の最適解が存在を示する．このことを示すのがここでの目的である．図3にこの周期解を示す．また，図4には変数 y に対応する随伴変数（adjoit variable）μ の周期的経路を示す[2)]．

図3　研究開発投資の周期的径路



2) ここでは Feichtinger and Sorger [1988] p.130 にならい，$f(y)=y^2$，$\alpha=0.1$，$\pi=1.0$，$c=0.09$，$r=0.05$ として，シミュレーションを行った．ただし，本稿でのシミュレーションは境界値問題の解法による正確なものではなく，以下の分析において各領域で成立する系を用いて周期解を探すという方法で行なわれている．この点において，ここでのシミュレーションは分析的に完全なものではないことを記す．ただし，Feichtinger and Sorger [1988] のシミュレーションについてもいくつかの問題点が残っているように思われる．この点については，本節最後の命題1の脚注で考察する．

図4　変数 μ の経路



このような周期解を分析するために，図3の $z-y$ 平面を次の4つの領域に分割する．

領域A；$z=0$ を満足する領域．すなわち，y 軸を示す．

領域B；$z>0$，$y=0$ を満足する領域．すなわち，z 軸を示す．

領域C；$z>0$，$y=1$．

領域D；$z>0$，$0<y<1$．

これら4つの領域における分析を行うために，問題(6)より，ハミルトン関数 H

$$H=\pi(1-y)-\left(\frac{c}{2}\right)u^2+\lambda\{f(y)-(1-y)-\alpha z\}+\mu u$$

を定義する．最大値原理より，関数 H を最大化することが要求されるが，問題(6)には制約条件 $z\geq 0$ および $0\leq y\leq 1$ が存在するので，あらためてラグランジェ関数

$$L=H+v_1z+v_2y+v_3(1-y) \tag{7}$$

を定義する．したがって，問題は，

$$\max_{u} \rightarrow L \tag{8}$$

$$\text{s.t.} \quad v_i \geq 0 (i=1,2,3) \quad v_1 z = v_2 y = v_3(1-y) = 0 \tag{9}$$

となる．

問題(8)に対する必要条件は次のようになる．

$$\frac{\partial L}{\partial u} = -cu + \mu = 0, \tag{10}$$

$$\dot{\lambda}\left(= rz - \frac{\partial L}{\partial z}\right) = (\alpha + r)\lambda - v_1, \tag{11}$$

$$\dot{\mu}\left(= r\mu - \frac{\partial L}{\partial y}\right) = r\mu + \pi - \lambda\left\{\frac{df}{dy} + 1\right\} - v_2 + v_3. \tag{12}$$

これらの条件を用いて，各領域における各変数の動きを分析し，周期的挙動の存在を考察する．

領域 A

周期的経路が存在すれば，図 3 の領域 A では $\dot{z} = 0$ となる．（後の命題 1 で見るように，実際には経路は点 P を通る．）領域 A では $z = 0$ でもあるので，(4)より，

$$f(y) - (1 - y) = 0$$

となる．そこで，上式を満足する y を $\hat{y}$ とおく．すなわち，

$$f(\hat{y}) - (1 - \hat{y}) = 0 \tag{13}$$

である（図 2 を参照せよ）．

領域 B

(9)および $z > 0$，$y = 0$ より，

$$v_1 = v_3 = 0$$

となる．さらに，z 軸上では $\dot{y} = 0$ であるので，(5)および(10)より，

$$u = \mu = 0$$

となる．したがって，(11)は，

$$\dot{\lambda} = (\alpha + r)\lambda$$

となり，さらに，$\mu = 0$（したがって$\dot{\mu} = 0$）および(12)より，

$$\lambda = \frac{\pi - v_2}{f'(0) + 1} \tag{14}$$

となる．ここで，λの値は$\dot{\lambda} = (\alpha + r)\lambda$にしたがって増加するので，(14)より，$v_2$の値が小さくなっていく．ただし，$v_2 \geq 0$であるので，少なくとも$v_2$がゼロに近づくかあるいはゼロになると，そのときは戦略を変更し領域Bを離れなくてはならない．一方，(4)は

$$\dot{z} = -1 - \alpha z$$

となる．すなわち，領域Bでは知識zは対応する指数関数にしたがって減少する．

領域C

変数yの取りうる値の範囲は$0 \leq y \leq 1$であるので，領域C（$z > 0$，$y = 1$）では変数yは上限の値をとる．明らかに，$\dot{y} = 0$であるので，(5)および(10)より，

$$u = \mu = 0$$

となる．また，(9)より，

$$v_1 = v_2 = 0$$

であるので，

$$\dot{\lambda} = (\alpha + r)\lambda$$

となり，(12)および$\dot{\mu} = 0$より，

$$\lambda = \frac{(\pi + v_3)}{\{f'(1) + 1\}} \tag{15}$$

となる．λの値は$\dot{\lambda} = (\alpha + r)\lambda$にしたがって増加するので，(15)より，$v_3$の値はそれに対応して大きくなる．ただし，$v_3 \geq 0$は満足しているものの，この領

域Cは早晩離れなくてはならない．なぜなら，この領域では$y=1$であるので，この間，基礎知識量zは増加するものの，(6)において利益はゼロであり，この状態を無限に続けることは無意味となるからである．一方，(4)は

$$\dot{z}=f(1)-\alpha z$$

となる．これを解くと，

$$z=\left(z_0-\frac{1}{\alpha}\right)e^{-\alpha t}+\frac{1}{\alpha}\quad（z_0\text{は領域Bに入ったときの初期値}）$$

となるので，$\alpha z_0<1$のときは，領域Bでは知識zは対応する指数関数にしたがって増加する．

領域D

$z>0$，$0<y<1$は，z軸，y軸および直線$y=1$を除く部分を指定する．結論を先取りすれば，この領域を支配する系が周期的軌道を発生させる根本的要素を提供する．その系を導きだそう．

まず，(4)を再掲する．

$$\dot{z}=f(y)-(1-y)-\alpha z \tag{d1}$$

また，(5)は(10)より，

$$\dot{y}=u=\frac{\mu}{c} \tag{d2}$$

となる．一方，$z>0$，$0<y<1$であるので，(9)より，

$$v_1=v_2=v_3=0$$

である．したがって，随伴方程式は，(11)および(12)より，

$$\dot{\lambda}=(\alpha+r)\lambda, \tag{d3}$$

$$\dot{\mu}=r\mu+\pi-\lambda\left\{\frac{df}{dy}+1\right\} \tag{d4}$$

となる．

以上，4つの領域について分析してきたが，これらの考察より，以下のいくつかの補題を得る．

補題1　すべての領域で，任意の時間 t において，

$$0 \leq z(t) \leq \frac{f(1)}{\alpha} \tag{16}$$

が成立する．

（証明）(4)すなわち $\dot{z} = f(y) - (1-y) - \alpha z$ の右辺に注目しよう．$f(y) - (1-y) - \alpha z > 0$ ならば $\dot{z} > 0$ で知識量 z は増加し，$f(y) - (1-y) - \alpha z < 0$ ならば $\dot{z} < 0$ で知識量 z は減少する．このとき，右辺を構成する第1項と第2項の和すなわち $f(y) - (1-y)$ は $y = 1$ で最大値 $f(1)$ をとる．したがって，任意の z に対し，

$$\max_{y \in [0,1]} \{f(y) - (1-y) - \alpha z\} = f(1) - \alpha z$$

となる．そして，$y = 1$ のとき，(4)は $\dot{z} = f(1) - \alpha z$ となるが，z は $\dot{z} = f(1) - \alpha z$ の平衡点 $\dfrac{f(1)}{\alpha}$ を超えることはできない．したがって，(16)が成立する．

（証了）

補題2　最適経路が領域Bに留まる時間は $\dfrac{\ln(1+f(1))}{\alpha}$ より短い．

（証明）最適経路が領域Bに到達した時間を τ とし，そのときの知識量を $z(\tau)$ で表す．領域Bでは z は $\dot{z} = -1 - \alpha z$ にしたがうので，初期条件 $(\tau, z(\tau))$ のもとでこれを解くと，

$$z(t) = -\frac{1}{\alpha} + \left\{\frac{1}{\alpha} + z(\tau)\right\} \exp\{-\alpha(t-\tau)\}$$

を得る．ただし，(16)より，$0 \leq z(t) \leq -\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\alpha}\{1 + f(1)\}\exp\{-\alpha(t-\tau)\}$ であるので，

$$\{1+f(1)\}\exp\{-\alpha(t-\tau)\}\geq 1$$

となる．ここで，上式の両辺に対数をとると，

$$t-\tau\leq\frac{\ln\{1+f(1)\}}{\alpha}$$

を得る．（証了）

補題2は，最適経路は領域Bに有限時間の間しか留まれないことを示している．このことは，領域Bでは系 $\dot{z}=-1-\alpha z<0$ となり，しかも $z(t)\geq 0$ であることからも明らかであろう．

補題3　最適経路は領域Cには有限時間の間しか留まれない．

（証明）領域Cでは $y=1$ であり，なおかつ $u=0$ である．したがって，問題(6)の目的関数はこの間ゼロとなる．したがって，最適経路が無限時間この領域に留まることはない．（証了）

領域Cは，知識量 z の蓄積に最大の努力が払われる．すなわち，投資家は基礎的研究開発に注目し，将来この蓄積から得られる利益に期待を寄せている．

補題4　最適経路は領域Dには有限時間の間しか留まれない．

（証明）(d3)に注目すると，(i) $\lambda\to+\infty$ あるいは $\lambda\to-\infty$，あるいは(ii) $\lambda=0$ のいずれかである．

(i)の場合を考えよう．(d4)において，$1\leq\frac{df}{dy}+1$ であるので，$\lambda\to+\infty$ のときは $\mu\to-\infty$，$\lambda\to-\infty$，のときは $\mu\to+\infty$ となる．そして，(d2)より，前者の場合は $y=0$ が，後者の場合は $y=1$ が有限時間の間に達成される．すなわち，有限時間の間に，経路は領域Bあるいは領域Cに到達する．

次に，(ii)の場合を考える．$\lambda=0$ であるので，(d4)は $\dot{\mu}=r\mu+\pi$ となる．したがって $\mu\to-\infty$，$\mu=-\frac{\pi}{r}$，あるいは $\mu\to+\infty$ のいずれかとなる．この

うち，$\mu \to -\infty$，$\mu = -\dfrac{\pi}{r}$，の場合は，(d2)より，$y=0$が有限時間の間に達成される．一方，$\mu \to +\infty$ の場合は$y=1$が有限時間の間に達成される．すなわち，有限時間の間に，経路は領域Bあるいは領域Cに到達する．（証了）

これらの補題より，周期的経路に関する次の命題を得る．

命題1　最適経路が領域Aに無限時間の間留まるのでなければ，最適経路は周期経路をとる．

（証明）補題2，補題3および補題4より，最適経路は領域B，領域Cおよび領域Dに有限時間の間しか留まれないので，最適経路が無限時間にわたり$z(t)>0$を維持することはできない．すなわち，有限時間の間に最適経路は必ず領域Aに到達する．最適経路が最初に領域Aに到達する時間tを$t=\tau$とする．すなわち，$z(\tau)=0$であり，$\dot{z}(\tau)=0$となる．したがって，(13)より，このとき$y=\hat{y}$となる．そして，いまは最適経路が領域Aに無限時間の間留まらない場合を考えているので，最適経路は早晩領域Aを抜け出す．ただし，領域A以外すなわち領域B，領域C，領域Dに最適経路は有限時間の間しか留まれないので，再び経路は領域Aに到達する．このときは同様に$y=\hat{y}$となる．以下，同様の考察を行えばよい．このとき，明らかに最適経路は$y=\hat{y}$（すなわち点P）を通過する周期経路となる．そして，このときのようすを図3に示す[3]．（証了）

---

3) Feichtinger and Sorger [1988] シミュレーションにはいくつかの課題を残すように思われる．問題とされるのは，(9)における変数v_i $(i=1,2,3)$の非負性である．各領域の分析で示したように変数λは$\dot{\lambda}=(\alpha+r)\lambda$で定まる指数関数にしたがって増加する．一方，領域Bの(14)と領域Cの(15)をそれぞれ変形すると，$v_2=\pi-\{f'(0)+1\}\lambda$および$v_3=\{f'(1)+1\}\lambda-\pi$となる．このとき，Feichtinger and Sorger [1988] ではλの初期値を領域Aにおいている．しかし，領域A→領域D→領域C→領域D→領域Bという経路を考えたとき，領域Aを初期値に取るとv_2とv_3の非負性が維持できなくなる．この両者の非負性を維持しようとすれば，λの初期値を領域C→領域D→領域Bという過程の中の領域Dに取らなくてはならないと予想される．

3.3 いくつかのマクロ経済モデル

3.3.1 Dasgupta, P. and J. Stiglitz [1980] の応用の試み

ここまでは，Feichtinger and Sorger [1988] におけるコントロールの間接的あるいは多段階的意思決定過程に注目し，一研究グループに関するミクロ経済的モデルをマクロ経済に応用する試みを行った．もちろん，ここでは貯蓄が投資に還流する過程を抽出してモデル設計を行っているので，完全なマクロ化とは言えないが，それでも，モデルをマクロ化しようとした段階で，マクロ経済におけるさまざまな要素をモデルに注入することが可能になる．ここでは，この応用の可能性について若干の考察を行いたい．

(6)における投資家群の利益 π について考えよう．(6)では，π を応用的研究開発により発生する利益と定義したが，投資家が関与する企業が経済的にどのような位置付けにあるのかが一つの問題となる．たとえば，企業は独占的立場にあるのか，寡占的状況にあるのか，あるいは完全競争的状況にあるのか等である．さらに，一つの判断基準として投資家および企業が社会的計画者である場合を想定することができよう．この場合，π は社会的利益と解釈されよう．そして，このように考えていくと，利益 π 自体がそれぞれの経済的状況に対応して異なっていると判断しなければならない．たとえば，社会的計画者，独占企業および完全競争下にある企業の研究開発による利益（したがって，研究開発に対する動機）をそれぞれ V^s，V^m および V^e で表わすと，Dasgupta, P. and J. Stiglitz, [1980] の分析では，

$$V^m \leqq V^e < V^s$$

であることがわかっている．さらに，寡占市場を想定し，寡占企業は独占利益 V^m を分割し合うと考えれば，上式は

$$\frac{V^m}{n} < V^m \leqq V^e < V^s \tag{17}$$

と書き改めることができよう．ただし，n は企業数で，$\dfrac{V^m}{n}$ は寡占の場合の１つの企業の利益を示す．

Dasgupta, P. and J. Stiglitz, [1980] が問題としているのは生産の費用を削減するような研究開発すなわち工程イノベーションであることに注意しなくてはならないが，この設定の下では，投資家が社会的計画者であるのか，あるいは投資対象が独占企業，寡占企業，完全競争下の企業のいずれであるのかということに対応して，研究開発から期待できる利益が異なってくる．すなわち，問題(6)の背後にある経済的状況が変わってくるのである．そして，それぞれの場合に関し問題を定式化しよとすれば，問題(6)における投資家の利益 $\pi(1-y)$ を，それぞれの場合について

$$\pi(1-y)\begin{cases} = V^s(1-y) & \text{(社会的計画者の問題のケース)} \\ = V^e(1-y) & \text{(完全競争の場合)} \\ = V^m(1-y) & \text{(独占状態の場合)} \\ = \dfrac{V^m}{n}(1-y) & \text{(寡占状態の場合；} n \text{ は企業の数)} \end{cases} \tag{18}$$

とすればよい．もち論，状態方程式は問題(6)のそれと同じでよい．すなわち，

$$\dot{z} = f(y) - (1-y) - \alpha z, \ \dot{y} = u$$

である．

このように，経済が置かれた状態に対応して問題を修正変更することが可能である．変更されるのは定数 π である．そして，この変更に対応して，図３で示した周期解の経路も修正されるであろう．そこで，この経路の変更について若干の考察を行おう．

まず，状態方程式は変わらないので，点Ｐは変更されない（(13)を参照せよ)．一方，領域Ｂでは，(14)に含まれる π が変更になる．このとき，領域Ｂでは次

の補題に示す変更が発生する．

補題5 Dasgupta, P. and J. Stiglitz, [1980] のモデル設計（すなわち，生産費用の削減を目的とする研究開発を問題としている状況）のもとでは，経済の状態が寡占的，独占的あるいは完全競争的であるのに対応して，経路の領域Bを離れるタイミングは遅くなる．領域Bに最も遅くまで滞在するのは社会的計画者である．

（証明）(14) $\lambda=\dfrac{\pi-v_2}{f'(0)+1}$ について考える．これを変形すると $v_2=\pi-\{f'(0)+1\}\lambda$ となる．ここで，λ の値は $\dot{\lambda}=(\alpha+r)\lambda$ が決定する指数関数にしたがう．ただし，$v_2\geq 0$ であるので，少なくとも v_2 がゼロに近づくかあるいはゼロになると，そのときは戦略を変更し領域Bを離れなくてはならない．ただし，いまはそれぞれの場合に対応して，π は(17)で示した V^m，V^e，V^s あるいは $\dfrac{V^m}{n}$ の値をとる．このとき，$v_2=\pi-\{f'(0)+1\}\lambda$ において，π の値が大きければ大きいほど v_2 がゼロに近づく時間は長くなる．一方，領域Bを通過する速度は $\dot{z}=-1-\alpha z$ であり，π の値に関わらない．したがって，π の値が大きければ大きいほど，領域Bを離れるタイミングは遅くなる．（証了）

領域Bは応用的研究開発にすべてを投入するプロセスである．この補題5より，この過程へ留まるタイミングは，研究開発から得られる利益が大きくなるのにしたがって，遅くなることがわかる．逆に解釈すれば，研究開発が生み出す利益が少なくなれば，それだけ応用的研究開発を早く取りやめることがわかる．ただし，ここではこの裏側すなわち基礎的研究開発を進行させる領域Cにおいてどのような事態が発生しているのかを分析しなくてはならない．

領域Cでは $z>0$，$y=1$ であるので，変数 y は上限の値をとる．すなわち，すべてのマネーは基礎的研究開発に投入され，応用的研究開発は行なわれない．

知識量 z の充電期間である．この領域に関しては次の補題が成立する．

補題 6 Dasgupta, P. and J. Stiglitz, [1980] のモデル設計（すなわち，生産費用の削減を目的とする研究開発を問題としている状況）のもとでは，経済の状態が寡占的，独占的あるいは完全競争的であるのに対応して，経路の領域 C を離れるタイミングは遅くなる．領域 C を最も遅いタイミングで離脱するのは社会的計画者である．

（証明）(15) $\lambda = \dfrac{(\pi + v_3)}{\{f'(1) + 1\}}$ について考える．これを変形すると $v_3 = \{f'(1) + 1\}\lambda - \pi$ となる．ここで，λ は $\dot{\lambda} = (\alpha + r)\lambda$ が定める指数関数にしたがう．

ところで，経路はこの領域 C を早晩離れなくてはならない．なぜなら，この領域では $y = 1$ であるので，基礎知識量 z は増加するものの，(6)において利益はゼロとなるからである．この事態を認識しつつ v_3 の意味について考える．v_3 は $1 - y$ すなわち応用的研究開発に対応するラグランジェ変数である．したがって，v_3 は応用的研究開発に関する制約が変化したときの最適利益の変化率を表している．領域 C は基礎的研究開発にすべてが投入されているが，その過程において v_3 の値が大きくなることは，応用的研究開発の価値が高まり，経路が領域 C を離脱するタイミングが近づいていることを意味している．すなわち，v_3 がある値 $\hat{v}_3$ に達した時点で，経路は領域 C を離れる．

このような状況のもとで，π は，それぞれの場合に対応して，(17)で示した $\dfrac{V^m}{n}$，V^m，V^e あるいは V^s の値をとる．このとき，$v_3 = \{f'(1) + 1\}\lambda - \pi$ において，π の値が大きければ大きいほど v_3 がある値 $\hat{v}_3$ に達する時間は遅くなる．一方，領域 C を通過する速度は $\dot{z} = f(1) - \alpha z$ で，π の値に関わらない．したがって，π の値が大きければ大きいほど，領域 C を離れるタイミングは遅くなる．（証了）

領域Cは基礎的研究開発が実行される過程なので，技術革新の基礎を築くこの過程の意義は大きい．補題6はこの過程に残るタイミングを問題にしており，社会的計画者，完全競争，独占，寡占の順序でタイミングが遅れることを示している．領域Cへの到達時間の比較分析ができないので，単純に比較できないが，補題6より，領域Cへの経路の滞在期間はこの順で長くなる可能性を持つ．

ところで，このような事実をシュンペーター仮説（すなわち企業規模と研究開発投資の因果関係に関する仮説）と照らし合わせつつ考察することは無意味ではあるまい．まず，社会的計画者に次いで完全競争的経済が領域Cに留まり続ける時間が遅く，独占的経済の領域C離脱の時間は完全競争経済のそれより早いという事実が注目される．すなわち，この分析は独占的大企業ほど研究開発に寄与するというションペーター仮説と相容れない．

この点に関しては，われわれが検討しているモデルの背景あるいはマクロ経済構造を十分理解しておかなければならない．われわれのモデルでは，社会的計画者，寡占，独占および完全競争のすべての場合において，投資家が保有するマネーの総量（したがって，企業群に投資されるマネーの総量）は同じであり，企業群の資金調達能力は問題とされていない．われわれが分析しようとしているのはマクロ経済構造の中での事象であり，ミクロ的な資金力は視野の外にある．たとえば，完全競争的企業群を問題としていても，マクロ的には資産市場を通してこれらの企業群に資金が投資される状況を問題としている．この完全競争のケースに関しては，多数のベンチャー企業が競合し，資産市場で資金を調達する場合を考えるとよい．シュンペーター仮説はミクロレベルで資金力を持つ独占的大企業の優位性が問題とされているが，補題5および補題6は，整備された資産市場の存在等を視野にいれたマクロ経済を問題としている．そして，このような視点の相違から発生する分析結果のズレは，資産市場の発展を含めマクロ経済構造の変化に対応して，分析の視点を修正することの重要性を示唆している．今日，新興市

場の発達とともに，市場から資金を調達する中小のベンチャー企業が群生し，独占的大企業もこれら中小の企業群が行う研究開発を注視せざるを得ない状況のなかで，企業規模のみを問題とする分析視点はこれを修正する必要があるといえよう．ここでの考察は，マクロ経済構造の変化に則した分析が必要であることを示している．

3.3.2 不確実性あるいは知識のフィードバックが存在する場合

上での分析の他に，問題(6)はさまざまなマクロ経済状況を取り入れる余地を残している．そのような例として，研究開発の成功に不確実性が存在する場合，および応用的研究開発より基礎的研究開発に知識のフィードバックが存在する場合を考えよう．

まず，研究開発の成功に不確実性が存在する場合であるが，不確実性を導入するために，研究開発の成功を表す確率変数 τ を考え，応用的研究開発に時間 t までに努力 $\int_0^t (1-y)ds$ が払われたとき，時間 t までに研究開発に成功する確率を

$$P(\tau \leq t) = 1 - \exp\left\{-\rho \int_0^t (1-y)ds\right\} \qquad (\rho \text{は正の定数})$$

で表す．このとき，時間区間 $(t, t+dt]$ において研究開発に成功する確率は

$$P\{\tau \in (t, t+dt]\} = \rho(1-y)dt + o(dt),$$

と計算される．このとき，問題(6)は，

$$\max_u \int_0^\infty e^{-rt}\left\{\pi\rho(1-y) - \left(\frac{c}{2}\right)u^2\right\}dt \qquad (19)$$

$$\text{s.t. } \dot{z} = f(y) - (1-y) - \alpha z,\ \dot{y} = u$$

と書き直すことができる．ここで，定数 ρ は1より小さいと考えられるので，(6)と(19)の利潤と比較してすると，$\pi(1-y) > \pi\rho(1-y)$ となる．したがって，

補題5および補題6と同様の考察を行うと，研究開発の成功に関する不確実性が存在する場合，領域Bおよび領域Cを離れるタイミングが，不確実性が存在しない場合に比べて，早くなることがわかる．

一方，応用的研究開発から基礎的研究開発への知識のフィードバックがある場合を考えると，問題(6)は，

$$\max_{u}\int_{0}^{\infty} e^{-rt}\left\{\pi(1-y)-\left(\frac{c}{2}\right)u^{2}\right\}dt \tag{20}$$

$$\text{s.t. } \dot{z}=f(y)-(1-y)+\theta(1-y)-\alpha z,\ \dot{y}=u$$

と書き改められる．ここで，定数$\theta\,(>0)$は，応用的研究開発に$(1-y)$が投入されたとき，応用的研究開発から基礎的研究開発へフィードバックする知識の割合を示す．そして，このような設定のもとで，問題(6)の周期的経路との比較を行ってみよう．まず，点P（すなわち$z=0$，$\dot{z}=f(y)-(1-y)+\theta(1-y)-\alpha z=0$となる点）の座標を$\bar{y}$で表すと，$\bar{y}<\hat{y}$（(13)を参照せよ）となることがわかる．さらに，領域C（すなわち$y=1$）を除く領域では知識が蓄積される速度$\dot{z}$が早くなるので，周期が短くなると予想される．

このように，問題(6)にはさまざまなマクロ経済的要素を導入する余地があるが，このことは逆に言えば，マクロ経済構造を意識しつつ研究開発投資理論を考察することの必要性を示していると言えよう．

4．むすび

本稿では，Feichtinger and Sorger [1988] を取り上げ，研究開発投資が含む周期的挙動に注目してこれをマクロ経済分析に応用する試みを行った．Feichtinger and Sorger [1988] のマクロ経済への応用の可能性は，Feichtinger and Sorger [1988] の多段階的あるいは間接的な制御構造にあった．すなわち，

マクロ経済におけるマネーの還流に着目した場合，マクロ経済自体が多段階的意思決定過程で構成されており，貯蓄が投資に向かう過程を Feichtinger and Sorger [1988] が持つ制御過程を用いて記述した．

このように，本稿の目的は，ミクロ経済の理論的成果をマクロ経済分析へ応用し，ミクロ経済分析とマクロ経済分析の接点を見い出すことにあった．そして，このような考察を通じて明らかになったのは，マクロ経済における研究開発投資の周期的挙動の存在の可能性とともに，ミクロ経済分析ではモデル化できないマクロ経済構造を研究開発投資の分析に取り入れることの重要性であった．すなわち，前章でも述べたように，たとえば，完全競争的企業群を問題としていても，マクロ経済的視野からすれば，資産市場を通してこれらの企業群に資金が投資される状況が問題とされる．シュンペーター仮説ではミクロレベルで資金力を持つ独占的大企業の優位性が問題とされているが，多数の中小のベンチャー企業が群生し，新興資産市場で資金を調達する状況の中，独占的大企業もこれら中小の企業群が行う研究開発を注視せざるを得ない状況を考えると，企業規模のみを問題とする分析視点はこれを修正する必要があるといえよう．すなわち，マクロ経済構造の変化に則した分析が必要であると言える．

〔参考文献〕

秋本耕二[2001]，『技術革新と経済構造』，九州大学出版会．

Dasgupta, P., and J. Stiglitz[1980], "Uncertainty, Industrial Structure, and the Speed of R&D," *Bell Journal Economics* Vol.11, pp.1-28.

Feichtinger, G. and G. Sorger[1988], "Periodic Research and Development," in *Optimal Control Theory and Economic Analysis 3*, Feichtinger, G. (ed.), North-Holland.

Goodwin, R.M.[1967], "A Growth Cycle," in *Socialism, Capitalism and Economic Growth*, Feinstein, C.H.(ed.), Cambridge University Press.

Goodwin, R.M.[1983], *Essays in Linear Economic Structures*, Macmillan, London.（有賀裕二，荒木勝啓，浅田統一郎，坂直樹訳『線型経済学と動学理論』，日本経済評論社，1988.）

Goodwin, R.M.[1986], "Swinging along Autostrada, Cyclical Fluctuation along the von Neuman Ray," in *Competition, Instability, and Nonlinear Cycle*, Semmler, M.(ed.), Springer-Verlag.

Goodwin, R.M., and L.F. Punzo[1987], The Dynamics of a Capitalist Economy, Polity

Iwai, K.[1984], "Schumpeterian Dynamics; An Evolutionary Model of Innovation and Imitation," *Journal of Economic Behavior and Organization*, Vol.5, pp.159-190.

Lee, T. and L.L. Wilde [1980], "Market Structure and Innovation; a reformulation," *Quarterly Journal of Economics*, Vol.94, pp.429-436.

Loury, G.C.[1979], "Market Structure and Innovation," *Quarterly Journal of Economics*, Vol.93, pp.395-410.

Metcalfe, J.S.[1981], "Impulse and Diffusion in the Study of Technical Change," *Future*, Vol.13, pp.347-359.

Pasinetti. L.L.[1981], *Structural Change and Economic Growth; a theoretical essay on the dynamics of the wealth of Nation*, Cambridge University Press. (大塚勇一郎, 渡会勝義訳『構造変化と経済成長』, 日本評論社, 1983.)

Pasinetti, L.L.[1990], "Normalised General Coordinates and Vertically Integrated Sectors in a Simple Case," in *Nonlinear and Multisectoral Macrodynamics*, K.Velupillai (ed.), The Macmillan Press.

Reinganum, J.F.[1981], "Dynamic Games of Innovation," *Journal of Economic Theory*, Vol.25, pp.21-41

Ricci, G.[1985], "A Differential Game of Capitalism; a simulation approach," in Feichtinger, G.(ed.), Optimal Control Theory and Economic Analysis 2, North-Holland.

Ricci, G.[1988], "Application of Mathematics to the Goodwin Model," in Ricci, G. and K. Velupillai(eds.), *Growth Cycles and Multisectoral Economics: the Goodwin Tradition*, Springer-Verlag.