

# ネットワーク理論研究とその周辺

## ー我々の研究の小括としてー

穴沢 務<sup>1</sup>・中山 明<sup>2</sup>

### 1. はじめに

本稿では、「ネットワーク理論」とその周辺領域との関連について概観するとともに、筆者が個別および共同で行ってきた研究内容を振り返り、今後の研究の方向性について考察したい。

まず、筆者2名の研究上の立ち位置について明らかにしよう。「ネットワーク」という用語は既に市民権を得ていて、それゆえに様々な意味で用いられている。Googleで「ネットワーク」を検索すると、約7,460万件（2015年8月28日時点）という膨大な数のページがヒットする。それらのすべてを精査して用語の多義性について議論することは忌避するが、ざっと概観する限り、次の4つの使われ方（意味と論点）に大別されると考える。

- (1) 「住民ネットワーク」、「福祉ネットワーク」などのように、一般市民が円滑な生活を送るための、市民間のつながりまたはそのための制度を「ネットワーク」と呼び、その役割や社会的影響について論じる。
- (2) 組織間の人間関係や、業界団体における企業間の協力（または敵対）関係を「グラフ」という数学ツールで抽象化したものを「ネットワーク」と呼び、組織・団体の特徴や発達・消滅のプロセス、組織・団体の中での「個」の役割などについて分析する。
- (3) 企業内 LAN やインターネットといった通信ネットワークそのものを指し、それらの構築、運用、保守を効率的に行うためのハードウェア、ソフトウェア、管理体制、法体系などについて論じる。
- (4) 通信ネットワークを含め、モノが流れる仕組み全般を「ネットワーク」と捉え、数学ツール「グラフ」で抽象化し、目的関数を設定した上で「最適」な構築・運用法について論じる。

---

1 久留米大学商学部

2 福島大学共生システム理工学類

このうち、筆者2名は主として(4)に取り組んでおり、その研究領域を「ネットワーク理論」と呼んでいる。なお、(2)も「グラフ」を活用することから(4)と密接な関連があるが、この領域は「ネットワーク分析」と呼ばれていて、主として経営学者や心理学者が関心を寄せている。また、(3)も(4)と簡単には切り離せないが、(3)は工学的、実務的色彩が強いのに対し、(4)は数学的、理論的色彩が強い。(1)は、おそらくはこの意味で最も認知されていると思うが、社会、政治、行政などの在り方について論じる領域であり、筆者が踏み込むことはほとんどない。

次に、「ネットワーク理論」の概略を簡単に述べておこう。この理論は「どんな問題」を「どの論点」で取り組むかによって、その方向性がさらに細かく分かれる。取り扱う問題としては、以下が代表的である。

- モノを運ぶ仕組みをどう構築するか？（最小木問題をはじめとするネットワーク設計問題）
- モノを運ぶルートをどう選ぶか？（最短路問題、巡回セールスマン問題など）
- 運ぶモノの量をどう決めるか？（最大流問題、ヒッチコック型輸送問題、最小費用流問題など）

これら各問題に対して、次のような論点で議論することが多い。

- 問題の難易度クラス（P か NP か）を判定する。
- 厳密解を求めるアルゴリズムを考案し、その計算量を評価する。
- 既存のアルゴリズムを改善する（理論上の計算量の向上を目指した改善、またはコンピュータでの実計算時間の短縮を目指した改善）。
- NP 困難問題に対して、近似解を求める多項式時間アルゴリズムを考案する。
- NP 困難問題に対して、最適解が多項式時間アルゴリズムで得られるような特別な場合（問題パラメータ）の特徴（凸性、Monge 性など）を見出す。
- 問題を一般化して、その解法アルゴリズムを考案する。
- ある問題の解法を、現実が発生している問題や、他の問題の子問題に適用する。

実際、（後述するように）筆者は個別または共同で、上記のうちいくつかの問題を、いずれもいくつかの論点で議論してきた。

この「ネットワーク理論」は、モノを流す仕組みの最適化といった実用的側面から出発しているものの、数学の一分野として純化していることも否めない。実際に、筆者2名も応用研究より理論研究に軸足を置いて、研究してきた経緯がある。しかし、「ネットワーク理論」のそもそもの目的に鑑みれば、その研究成果が果たして実社会に役立つものなのか、常に自省しながら取り組むべきであろう。

そこで本稿では、「ネットワーク理論」と他の研究領域との関連について触れつつ、今後の応用研究の可能性について模索したい。また、筆者が個別または共同で進めてきた研

究について振り返り、残された課題や研究の発展性について考察したい。

第2節では、これまでの研究成果や方向性についてある程度正確に言及するために、「ネットワーク理論」の基盤となるグラフ理論の用語や記法について最低限の定義を与える。第3節では、「ネットワーク理論」の隣接領域として「ネットワーク分析」を取り上げ、諸概念の呼称の違いや、注目する尺度などについて述べる。第4節では、「ネットワーク理論」の現実問題への応用例について、簡単なサーベイを与える。第5～7節では、筆者2名の個別または共同で進めてきた研究の成果について、その小括も兼ねて振り返りたい。第8節で、筆者の研究活動について今後の展望を述べて、結語に代えたい。

なお、本稿のうち第4節と第6節の主たる執筆は中山が、それ以外の主たる執筆は穴沢がそれぞれ担当する。

## 2. 準 備

ネットワーク理論、とりわけその基盤となるグラフ理論においては、用語や記法が必ずしも統一されていない。そこで、この研究領域での慣習に従い、まずは本稿で用いる用語や記法の定義を行う。下記の定義の大部分はNakayama & Anazawa [18] や中山・穴沢 [36] に倣っている。

グラフ (graph) とは、頂点集合  $V$  と辺集合  $E$  の組  $(V, E)$  である。ここで、 $V$  は1個以上の頂点 (vertex) の有限集合、 $E$  は0個以上の辺 (edge) の有限集合である。本稿では、各辺が相異なる2頂点の組として一意的に定義される (すなわち「ループ」や「多重辺」を含まない) ものとする。各辺が2頂点  $v, w \in V$  の順序対  $(v, w)$  として表されるとき、そのグラフを有向グラフ (directed graph、digraph) という。一方、各辺が2頂点  $v, w \in V$  の集合  $\{v, w\}$  として表されるとき、そのグラフを無向グラフ (undirected graph) という。与えられたグラフ  $G := (V, E)$  に対して、その頂点集合  $V$  を  $V(G)$ 、辺集合  $E$  を  $E(G)$  と表す。

$G$  は有向グラフとする。辺  $e := (v, w) \in E(G)$  に対して、 $v$  を  $e$  の始点 (initial vertex)、 $w$  を  $e$  の終点 (terminal vertex) を呼び、それぞれ  $\partial_G^+(e) := v$ 、 $\partial_G^-(e) := w$  と表す。また、頂点  $v \in V(G)$  に対して、 $v$  から出る辺の集合を  $\delta_G^+(v) := \{e \in E(G) : \partial_G^+(e) = v\}$ 、 $v$  に入る辺の集合を  $\delta_G^-(v) := \{e \in E(G) : \partial_G^-(e) = v\}$ 、 $v$  と接続する辺の集合を  $\delta_G(v) := \delta_G^+(v) \cup \delta_G^-(v)$  とそれぞれ定義する。 $G$  が無向グラフのときは、 $v$  と接続する辺の集合を  $\delta_G(v) := \{e \in E(G) : v \in e\}$  と定義する。

有向または無向グラフ  $G$  と頂点  $v \in V(G)$  に対して、 $\deg_G(v) := |\delta_G(v)|$  ( $v$  と接続する辺の数) を  $v$  の次数 (degree) という。

$G$  は有向または無向グラフとする。グラフ  $G'$  が  $V(G') \subseteq V(G)$  かつ  $E(G') \subseteq E(G)$

を満たすとき、 $G'$  を  $G$  の部分グラフ (subgraph) といい、特に  $V(G') = V(G)$  のとき、 $G'$  を  $G$  の全域グラフ (spanning graph) という。  $E(G)$  の空でない部分集合  $E'$  に対して、

$$V' := \begin{cases} \bigcup_{e \in E'} \{\partial_G^+(e), \partial_G^-(e)\} & (G \text{ が有向グラフ}) \\ \bigcup_{e \in E'} e & (G \text{ が無向グラフ}) \end{cases}$$

とおくとき、 $G[E'] := (V', E')$  を  $E'$  で誘導された  $G$  の部分グラフという。  $G$  の部分グラフ  $G'$  と  $E(G)$  上の実数関数  $\rho$  に対して、 $\rho(G') := \sum_{e \in E(G')} \rho(e)$  と定義し、 $\rho|_{E(G')}$  は  $\rho$  の  $E(G')$  への制限とする。

与えられた有向または無向グラフ  $G$  に対して、頂点と辺の交互列

$$W := (v_1, e_1, v_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$$

を考える。但し、 $v_1, \dots, v_{k+1} \in V(G)$ ,  $e_1, \dots, e_k \in E(G)$ ,

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, e_i = \begin{cases} (v_i, v_{i+1}) & (G \text{ が有向グラフ}) \\ \{v_i, v_{i+1}\} & (G \text{ が無向グラフ}) \end{cases},$$

$v_i \neq v_j$  ( $\forall i, j: 1 \leq i < j \leq k$ ) を満たすとする。また、 $G$  の部分グラフ

$$G' := (\{v_1, \dots, v_{k+1}\}, \{e_1, \dots, e_k\})$$

も考える。このとき、 $W$  を  $G'$  のトレイル (trail) という。もし  $v_1 \neq v_{k+1}$  かつ  $k \geq 1$  ならば、 $G'$  は  $G$  内のパス (path) といい、 $v_1 = v_{k+1}$  かつ  $k \geq 2$  ならば<sup>3</sup>、 $G'$  は  $G$  内の閉路 (cycle) という。なお、 $G' = G$  のとき「 $G$  内の」という語句は省略する。 $G'$  が上記  $W$  をトレイルとするパスであるとき、 $G'$  は「 $v_1$ - $v_{k+1}$ -パス」や「 $v_{k+1}$  は  $v_1$  から到達可能 (reachable)」と表現する。パス  $P$  に対して、 $P_{[x,y]}$  は  $E(P_{[x,y]}) \subseteq E(P)$  を満たす  $x$ - $y$ -パス (すなわち  $P$  の  $x$  から  $y$  への部分パス) とする。

有向グラフ  $G$  と辺  $(v, w) \in E(G)$  (但し  $(w, v) \notin E(G)$ ) に対して、 $(v, w)$  を反転する (reverse) とは、有向グラフ  $(V(G), E(G) \cup \{(w, v)\} \setminus \{(v, w)\})$  を構築することである。もし有向グラフ  $P$  がいくつかの辺を反転することで  $x$ - $y$ -パスとなるならば、 $P$  は  $x, y$  間の方向自由パス (direction free path)<sup>4</sup> であるという。方向自由閉路 (direction free cycle) も同様に定義する。有向グラフ  $G$  は、任意の相異なる 2 頂点の組  $x, y \in V(G)$  に対して、 $x, y$  間の方向自由パスを持つとき、連結である (connected) という。有向グラフ  $G$  の極大な<sup>5</sup> 連結部分グラフを  $G$  の連結成分 (connected component) という。方向自

3 本稿では、無向グラフ  $G$  内の  $k = 2$  となる閉路は扱わない。なぜならば、その存在は多重辺の存在を意味するからである。

4 「方向自由 (direction free)」という用語は中山・穴沢 [36] が導入した造語である。

5 一般に、「 $G$  の部分グラフ  $G'$  は性質  $P$  を持つ極大なグラフである」とは、 $G'$  に頂点または辺を 1 つ以上追加してできる ( $G$  の) 任意の部分グラフは性質  $P$  を持たないことを意味する。

由閉路を含まない有向グラフを方向自由森 (direction free forest)、連結な方向自由森を方向自由木 (direction free tree) という。

無向グラフ  $G$  については、任意の相異なる 2 頂点の組  $x, y \in V(G)$  に対して、 $x, y$  間にパスがあるとき、連結であるという。無向グラフ  $G$  の極大な連結部分グラフを  $G$  の連結成分という。閉路を含まない無向グラフを森 (forest)、連結な森を木 (tree) という。無向グラフ  $G$  の全域グラフ  $T$  が木であるとき、 $T$  を  $G$  の全域木 (spanning tree) という。

無向グラフ  $G$  の頂点数  $|V(G)|$  が  $n$  に等しく、どの相異なる 2 頂点間にも辺があるとき、 $G$  を  $n$  次完全グラフ (complete graph of order  $n$ ) といい、 $K_n$  と書く。

### 3. ネットワーク『理論』とネットワーク『分析』

第 1 節で述べたように、筆者 2 名が主に取り組む「ネットワーク理論」に隣接する研究領域として「ネットワーク分析」がある。両者は「ネットワーク」という共通の用語を用いてはいるが、後に続く語句が『理論』か『分析』かによって、その対象や視点が大きく異なる。この節では、ネットワーク理論 (本節内で『理論』と略称) と比較して、ネットワーク分析 (同『分析』) がどのような方向性を指向しているのかについて、諸概念の呼称の違いや注目する尺度の観点から考察する。

前節で『理論』の基盤となるグラフ理論の諸定義を述べたが、『分析』では同じ概念に別の呼称を与えていることがある。また、『理論』ではあまり注目しない概念を『分析』では重要視している場合がある。これらの点を、『分析』の専門書 (例えば安田 [37] など) にある定義から明らかにする。

まず、「ネットワーク」という用語の使い方に違いがある。『理論』では、いくつかの頂点を辺で結ぶ構造を「グラフ」と呼び、グラフの辺または頂点に (コストなどを表す) 数値を付加したものを「ネットワーク」と呼んでいる。それに対して、『分析』では「ネットワーク」を「グラフ」とほぼ同じ意味で用いている。すなわち『分析』の文脈では「グラフ」の代わりに「ネットワーク」をしばしば用いている。その理由は、『分析』では個と個に結びつきがあるか否かに注目し、その結びつきの強さなどは捨象して論じる傾向があるからと推察できる。

『理論』における「頂点」と「辺」は、その領域でさえ様々な呼称が使われる。「頂点」は「点」(point)、「節(ノード)」(node) と呼ばれることもあり、「辺」は「線」(line)、「枝」(branch)、「弧」(arc) と呼ばれることも多い。一方、『分析』では「頂点」と「辺」の代わりに「点」と「線」という用語を多く見かけるが、「辺」の同意語として「紐帯 (ちゅうたい)」もしばしば出現する。「紐帯」が血縁・地縁・利害関係などの社会的な結びつきを意味することから、このような呼称は研究領域が経営学、社会学、心理学と深く関係することが背景

にあると考えられる。

ここからこの節の終わりまで、「グラフ」といえば無向グラフを指すものとする。グラフ  $G$  においてある辺  $\{v, w\} \in E(G)$  が存在するとき、『理論』では 2 頂点  $v, w \in V(G)$  が「隣接する」(adjacent) という。一方、このとき『分析』では「直接結合の関係にある」という。 $V(G) := \{1, 2, \dots, n\}$  のとき、 $G$  を表現する方法として、次のような  $n \times n$  行列  $A := [a_{ij}]$  を用いることがある：2 頂点  $i, j \in V(G)$  が隣接するとき  $a_{ij} := 1$ 、そうでないとき  $a_{ij} := 0$  とおく。このような行列  $A$  を、『理論』では「隣接行列」、『分析』では「ソシオマトリックス」と呼んでいる。「ソシオ」(socio-) が「社会の」や「社会学の」を意味する接頭語であることから、『分析』におけるこのような語法も研究のバックグラウンドから派生したものと思われる。

『理論』における「パス」は『分析』でも同義語で用いられる。但し、パスを構成する辺の数が最小のパスを、『分析』では「測地線」と呼んでいる。これは曲面上で最短距離を結ぶ曲線を意味するが、地球上のグローバルなネットワークを連想させる用法である。

次に、『理論』に比べて『分析』の方でしばしば注目される尺度をいくつか挙げておく。まず、ネットワーク全体の特徴を表す尺度として、ネットワークの「密度」と「分散」が挙げられる。これらはいずれもグラフの各頂点の次数から計算される。与えられたグラフ  $G$  に対して、

$$\text{密度} := \frac{\sum_{v \in V(G)} \deg_G(v)}{n(n-1)}, \quad \text{分散} := \frac{\sum_{v \in V(G)} (\deg_G(v) - \mu)^2}{n}$$

(但し、 $n := |V(G)|$ ,  $\mu := \sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) / n$ ) と定義される。「密度」はネットワーク全体の濃密度、「分散」はネットワーク内の多様性を表すと解釈できる。

ネットワーク内の派閥の有無については、「クリーク」という概念で論じられる。『理論』（特にその基盤となる「グラフ理論」）においても、「クリーク」はしばしば取り上げられる。グラフ  $G$  の部分グラフ  $G'$  が、ある  $m$  (但し  $2 \leq m \leq |V(G)|$ ) に対して  $G' = K_m$  となるときの、 $V(G')$  を  $G$  内の「クリーク」(clique) という。これは、 $V(G')$  のどの 2 頂点も隣接することを意味する。一方、『分析』ではそれを一般化した「 $N$ -クリーク」がしばしば用いられる。「 $N$ -クリーク」とは、どの 2 頂点間にも長さ（パスを構成する辺の数）が  $N$  以下のパスがあるような頂点集合を意味する（図 1 を参照）。



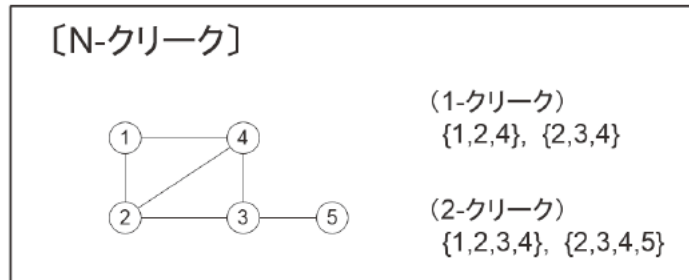


図 1:  $N$ -クリークの例（出典：穴澤 [30] を一部改変）

よって、『理論』における「クリーク」は『分析』の「1-クリーク」に等しい。整数  $N$  は派閥の結束の強さ（値が小さいほど強い）と解釈できる。

組織内の構成員の性質については、「中心性」と「媒介中心性」が挙げられる。グラフ  $G$  の頂点  $v \in V(G)$  に対して、

$$v \text{ の中心性} := \frac{\deg_G(v)}{n-1},$$

$$v \text{ の媒介中心性} := \frac{v \text{ を途中に含む測地線の数}}{\text{長さ2以上の測地線の総数}}$$

とそれぞれ定義される。ここで、媒介中心性の定義にある「 $v$  を途中に含む」とは、測地線（パスの一種）のトレイル  $(v_1, e_1, v_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$ （但し  $k \geq 2$ ）において、ある  $i$  ( $2 \leq i \leq k$ ) に対して  $v = v_i$  が成り立つことである（図 2 を参照）。

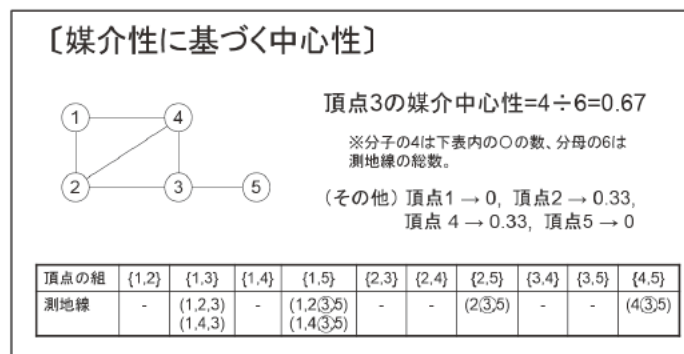


図 2: 媒介中心性の計算例（出典：穴澤 [30] を一部改変）

「中心性」は、頂点  $v$  と隣接する頂点の数だけで計算される、いわば「顔の広さ」の尺度である。一方「媒介中心性」は（例えば）円滑な情報交換に頂点  $v$  が関わる頻度を表すもので、いわば「キーパーソン」の度合いを示す。

このように、『分析』における語法や尺度は、組織・団体の特徴や、その中の個の役割

の分析を目的に採用されていることがわかる。『分析』では、こうした概念を用いて、例えば成功を収めた(または失敗を犯した)組織の特徴の把握や、そうでない組織との比較を、計量的に行っている。実証分析の事例については、例えば与謝野ら [38] を参照されたい。

#### 4. ネットワーク理論の現実問題への応用

中山の見解では、ビジネスに関わる以上、ネットワーク理論とビジネスの関連は秘密にされる場合が多く、同理論の応用やその理論を用いて開発されたアルゴリズムやシステムの概略が散見される程度と感じている。例えば、過去に中山は「カーナビ・システムにダイクストラ法<sup>6</sup>が取り込まれた」という日本経済新聞の記事を目にしたが、細部は不明であった。この記事をここで紹介すべく掲載日時を探したが突き止められなかった。ただ、関連情報はパイオニアの研究年報 [35] からその一端を垣間見れる。パイオニアの田原仁氏はこの年報で、“パイオニアでは 1996 年、GPS カーコンピュータ「AVIC-G70」を商品化したが、このシステムの一部にダイクストラ法をもとに開発した「リンクダイクストラ法」が組み込まれた”と述べている。同文献によると、リンクダイクストラ法とは、ダイクストラ法を応用し、探索時間を短縮させるために経路データの階層化を行って、階層化された経路データを用い、よりよい経路を探索する方法とのことである。以下では、学術論文での裏付けのある内容を 3 つ取り上げる。1 つ目は、会社のキャッシュフロー分析である。これは、将来のある時点で会社を精算したときの資金回収を最大化するために特別なネットワーク上の最適化問題としてモデル化して分析した研究である。2 つ目は、再生可能エネルギー、特に、有機太陽光電池における電子の振る舞いを調べるためにグラフ理論を用いた研究がある。3 つ目は、文献 [4] からで、ソーシャルネットワークの情報をビジネスに活用できるマイニング手法や分析方法を提案するという研究内容である。多方面のビジネスへの適用手法からネットワークフローモデルの事例を紹介する。

1 つ目の研究の起源は、1979 年に発表された Golden らの文献 [7] に遡る。彼らは会社のキャッシュフローを分析するために、会社の長期にわたる事業を「キャッシュフローネットワーク」と呼ばれる構造にモデル化し、2 資産（現金等価物と投資資産）の配分およびそれら流れをこのネットワーク上の最適化問題として定式化した。さらに、彼らはその問題を解くアルゴリズムを提案し、それを用いたキャッシュフロー分析や効率的な投資配分方法を提案した。ただし、そのアルゴリズムの妥当性も計算量の評価もなされなかった。

CNO 問題：ある会社が 2 資産  $X$  と  $Y$  を第 1 期から第  $n$  期まで管理しようとしている。ここで、 $X$  は非投資用資産ですぐに換金可能な現金等価物、 $Y$  は株式や債権を含む有価

6 最短路問題（特別な頂点から各頂点への最短路を求める問題）において負の長さの辺を含まないネットワークに対して適用できる代表的なアルゴリズム。



証券などで会社利益をもたらす投資用資産である。簡単のため、資産 X と Y はそれぞれ、各期において（期に依存しない）一定の利回り  $\alpha$ 、 $\beta$  をもっているとする。さらに、 $c_1$  と  $c_2$  はそれぞれ 1 単位の資産 X を Y に変換するコスト、1 単位の資産 Y を X に変換するコストとする。ここで、 $0 < \alpha < \beta$  かつ  $0 < c_i < 1$  ( $i = 1, 2$ ) と仮定する。各期  $j := 1, 2, \dots, n$  において、 $S(j)$  と  $D(j)$  はそれぞれ、資産 X に対する供給量、需要量で既知とする。なお、第 1 期は、資産 X の既知一定量  $y_0 > 0$  を変換コストなしで資産 Y に振り向けられるとする。キャッシュフローネットワーク最適化問題 (cashflow network optimization problem ; CNO 問題) は、各期において資産 X の需給量を満たし、X の適当な量を Y に投資したり、Y の適当な量を X に戻したりしながら、最終期  $n$  に 2 資産を全部 X に変換したときの量を最大化することである。次に定式化を説明する。まず、グラフ  $G$  を定義する。頂点集合  $V(G)$  は  $V_n \cup \{v_0, \hat{v}_0\}$ 、辺集合  $A(G)$  は  $A_{1n} \cup A_{2n} \cup A_{3n}$  とする。ここで、

$$\begin{aligned} V_n &:= \{v_i, \hat{v}_i : i = 1, 2, \dots, n\}, \\ A_{1n} &:= \{(v_i, v_{i+1}), (\hat{v}_i, \hat{v}_{i+1}) : i = 1, 2, \dots, n-1\}, \\ A_{2n} &:= \{(v_i, \hat{v}_i), (\hat{v}_i, v_i) : i = 1, 2, \dots, n\}, \\ A_{3n} &:= \{(v_0, v_i), (v_i, \hat{v}_0) : i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{(v_0, \hat{v}_1)\} \end{aligned}$$

である。各  $i := 1, 2, \dots, n$  に対して、 $v_i$  と  $\hat{v}_i$  は共に第  $i$  期に対応する頂点で、それぞれ非投資資産、投資資産の入出量を集約する。また、 $v_0$  と  $\hat{v}_0$  はそれぞれ各期の資産の供給量と需要量を束ねる頂点である。ゲイン関数 (gain function)  $\gamma : A(G) \rightarrow \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$  ( $\mathbb{R}_+$  は非負実数の集合) は次のように定義される。

$$\gamma(a) = \begin{cases} \alpha' := 1 + \alpha & (a = (v_i, v_{i+1}) \in A_{1n}) \\ \beta' := 1 + \beta & (a = (\hat{v}_i, \hat{v}_{i+1}) \in A_{1n}) \\ c'_1 := 1 - c_1 & (a = (v_i, \hat{v}_i) \in A_{2n}) \\ c'_2 := 1 - c_2 & (a = (\hat{v}_i, v_i) \in A_{2n}) \\ 1 & (a \in A_{3n}) \end{cases}$$

$\alpha'$  と  $\beta'$  はそれぞれ 1 単位の資産 X、1 単位の資産 Y を一期だけ運用した後に得られる元金とその利子の総額を意味する。また、 $c'_1$  と  $c'_2$  はそれぞれ 1 単位の資産 X を Y に変換したあとに残る Y の量、1 単位の資産 Y を X に変換した後に残る X の量である。このとき、キャッシュフローネットワークとは  $N := (G, \gamma, \mathbf{S}, \mathbf{D}, y_0)$  である。ここで、 $\mathbf{S} := \{S(j) : j = 1, 2, \dots, n\}$ 、 $\mathbf{D} := \{D(j) : j = 1, 2, \dots, n\}$  とする。 $n = 3$  の場合の  $N$  を図 3 の左側に、ネットワーク内の資産の流れを右側に示した。右側のネットワークにおいて、各辺の数値はフロー値で、例えば、辺  $(v_2, v_3)$  のフロー値は  $f((v_2, v_3)) = 2.91$  (億円) である。

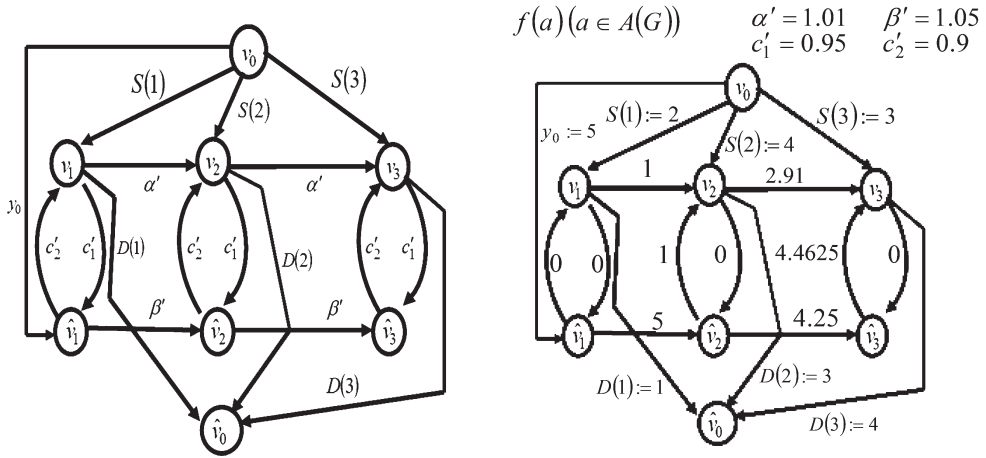


図 3 :  $n = 3$  の場合のキャッシュフローネットワーク  $N$  (左側) とキャッシュフローの流れ (右側、単位 : 億円)

(出典 : 文献 [7] を一部改変)

さて、この最適化問題は次の目的関数を最大にする。

$$\partial f(v_n) := \sum_{a \in \delta_G^-(v_n)} \gamma(a) f(a) - \sum_{a \in \delta_G^+(v_n)} f(a)$$

なお、制約条件は以下の通りである。

$$f((v_0, \hat{v}_1)) = y_0, \quad \partial f(w) = b(w) \quad (w \in V(G)),$$

$$f(a) \geq 0 \quad (a \in A(G)),$$

$$f((v_0, v_i)) = S(i) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$f((v_i, \hat{v}_0)) = D(i) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

ここで、 $b(w)$  は次のように定義される。

$$b(w) = \begin{cases} -(y_0 + \sum_{j=1}^n S(j)) & (w = v_0) \\ \sum_{j=1}^n D(j) & (w = \hat{v}_0) \\ 0 & (w \in V(G) \setminus \{v_0, \hat{v}_0, v_n\}) \end{cases}.$$

事例研究としては、2011 年の Pacheco らの論文 [26] が挙げられよう。彼らは、Golden らの研究を発展させ、ゲインつきネットワーク上のフロー問題として定式化し、ブラジルの冷凍濃縮オレンジジュース製造会社の財務データを分析した。2013 年の中山の論文 [20] では、Golden らの提案した解法とは異なる再帰的アルゴリズムを提案し、その妥当性と

共に計算量も評価した。

2 つ目は、再生可能エネルギー分野への応用研究である。Wodo らは 2010 年以降、グラフ理論を用いた有機太陽電池の解析に関する一連の研究を展開した。図 4 の左側は、有機太陽電池における電子の振る舞いおよび電流の流れ方の概略である。励起子とは、励起電子と正孔の組である（図 4 の左側で、○が正孔で●が励起電子）。ここで、励起電子とは、光により励起で生じる半導体の価電子である。電流が流れる仕組みは、励起子から生じる有機電子がドナー（有機電子の供与体）からアクセプター（有機電子の受容体）への受け渡しを繰返し、電極間を移動することで電流が流れる。図 4 の右側は、文献 [28] で提案された有機太陽電池のグラフによるモデル化の一つである。この図で、離散化した格子状の有機素材（boxcel と呼ばれる）が頂点集合（図の「○」）であり、それらの間の結びつきを辺とした辺集合（○の間を結んだ線分）である。さらに、頂点「○」の中の番号は、0 がアクセプター、1 がドナー、2 がアノード<sup>7</sup>、3 がカソード<sup>8</sup>に対応する。さらに、彼らは辺の結びつき度合いを数値化した重みつきグラフも考察し、このようなグラフ上で電子の振る舞い、電子の探索、最短経路、特殊な頂点集合、ドナーやアクセプターと接続する辺集合などを求めるアルゴリズムを提案するとともに、数値実験によって、電子の振る舞いなどを検証した。

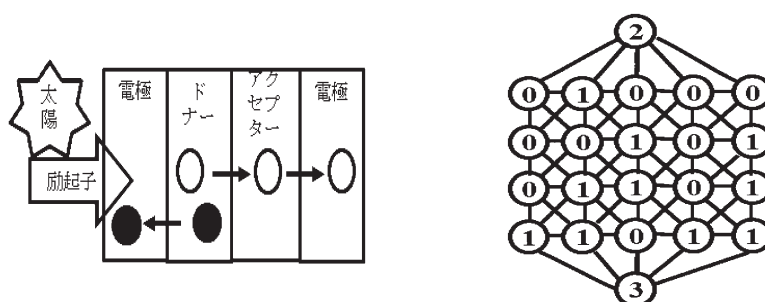


図 4：有機太陽電池における電子の振る舞い（左側）とグラフによるモデル化（右側\*）

3 つ目は、Bonchi らによる文献 [4] からの紹介である。彼らは、近年のソーシャルネットワークがオンライン上のメディア共有サイトと結びつき、価値あるデータが蓄積されているにも関わらず、ビジネスへの活用が十分になされていないと主張する。さらに、彼らは次の点に着目した：ネットワークマイニングのための既存のモデル化や解決策が多数存在するが、研究者によって開発された技術と現実社会への適用との間には大きなギャップがある。この文献では、ビジネス内で発生する課題を研究テーマごとにカテゴリー化

7 外部から電流が流れ込む電極。

8 電荷が流れ込む電極。

\* 図 4 右図は、文献 [28] の元となるディスカッション・ペーパーを参考に、中山が作成した。

し、ソーシャルネットワークに関わる技術の利活用に特化して、ビジネスへの利活用を整理した。特に、データ獲得 (data acquisition)、準備 (preparation)、信頼 (trust)、専門的技術 (expertise)、コミュニティの構造 (community structure)、ネットワークの動的性 (network dynamics)、情報伝播 (information propagation) に関しては詳細な議論を展開した。その中に、局所的な信頼度を計算するためにネットワークフローを用いた事例がある。「局所的」とは、ネットワーク全体ではなく、ある個人に関する部分ネットワークに限定するものである。例えば、Levien と Aiken の文献 [11] は、ある種のネットワーク内の最大フローを計算することで、信頼度や名声度合いを求める方法を提案し、Advogato と呼ばれる実際のコミュニティで検証した。また、Ziegler らの文献 [29] では、SNS における信頼度の伝播過程を分析するとともに、関係者の協力を得ながら Appleseed と呼ばれる独自システムを構築した。

## 5. 穴沢による成果

この節より、各筆者によるこれまでの成果について振り返り、今後の研究の方向性を探る一助にしたい。

穴沢は、1990 年代終わりごろから、神保雅一教授（現・中部大学）の指導の下、主としてネットワーク設計問題に取り組んだ。その当時は、大学等で LAN の構築・運用が急速に普及した時期であり、その際に生じる問題について数理モデルを開発し、解決の糸口を見つけようとする機運が高まっていた。

**ORST 問題** 穴沢が最初に着手したのは、「次数制約付き最適要求全域木問題」である。まず、最適要求全域木 (optimum requirement spanning tree; ORST) を定義する。 $G := K_n$  は (無向) 完全グラフ (但し  $V(G) = \{0, 1, \dots, n-1\}$ ) とし、相異なる 2 頂点  $v, w \in V(G)$  に対して “requirement” と呼ばれる非負の値  $r_{vw}$  が与えられるとする (但し  $r_{vw} = r_{wv}$  である)。このとき、次の目的関数を最小にする  $G$  の全域木  $T$  が ORST である：

$$f(T) := \sum_{v, w \in V(G): v < w} d(v, w; T) r_{vw}.$$

ここで、 $d(v, w; T)$  は  $T$  内の  $v$ - $w$ -パスの長さ ( $v$ - $w$ -パスを構成する辺の数) である<sup>9</sup>。ORST は、 $r_{vw}$  が 2 地点  $v, w$  間の通信確率ならば、パスの長さの期待値を最小にするツリー型通信ネットワークと捉えることができる。ORST を見つける問題については、次数制約がない場合、Hu [9] が Gomory-Hu のアルゴリズムを用いて多項式時間で解けることを示していた。一方、穴沢が取り組んだのは、各頂点  $v \in V(G)$  に対して、次数の上限値  $l_v$  が

9 第 7 節でわかるように、「パスの長さ」の定義は扱う問題によって変わるので、注意を要する。

与えられて、制約条件  $\deg_T(v) \leq l_v$  ( $\forall v \in V(G)$ ) の下で  $f(T)$  を最小にする問題である。但し、各  $l_v$  は一般性を失うことなく

$$l_0 \geq l_1 \geq \dots \geq l_{n-1} \geq 1, \sum_{v=0}^{n-1} l_v \geq 2(n-1)$$

が成り立つと仮定する。Hu [9] の次数制約のない問題が  $l_v = n-1$  ( $\forall v \in V(G)$ ) の場合と見なせることから、穴沢の問題は Hu [9] の問題を一般化したものといえる。Anazawa [1] はさらに、区間  $[0, n-1]$  上で単調非減少の任意の実数関数  $g$  に対して、目的関数を

$$f_g(T) := \sum_{v, w \in V(G); v < w} g(d(v, w; T)) r_{vw}$$

と拡張した一般化最適要求全域木 (generalized optimum requirement spanning tree; GORST) を求める問題を提示した。一般にこの問題は NP 困難であることが知られているが、Anazawa [1] は各  $r_{vw}$  が以下を満たすとき、GORST を  $O(n)$  時間で構成できることを示した。

(a)  $r_{vw} \geq r_{vw'} \quad (\forall v, w, w' \in V(G) : w \neq v, w' \neq v, w < w')$ 。

(b)  $r_{vw} + r_{v'w'} \geq r_{vw'} + r_{v'w} \quad (\forall v, v', w, w' \in V(G) : v \neq w, v \neq w', v' \neq w, v' \neq w', v < v', w < w')$ 。

なお、条件 (b) は、Monge 性<sup>10</sup> と深く関連する。さらに Anazawa [1] は、以下のことを示した。

(1) GORST が、1 か所以上の故障がある場合の通信不能確率が最小となるツリー型通信ネットワークであること。

(2) 条件 (a)、(b) を容易に仮定できるような状況が存在すること。

**ORHC 問題** ORST 問題とその一般化である GORST 問題では、ある意味で信頼性の高いツリー型通信ネットワークの構築方法について論じた。しかし、信頼性の観点でいえば、ネットワークは (2 以上の整数  $k$  に対して)  $k$ -連結<sup>11</sup> であること、すなわち 1 頂点が故障しても迂回路があることが望ましい。そこで Anazawa [3] は、すべての頂点を結ぶリング型通信ネットワークにおいて、ORST 問題に類する目的関数を最適化する問題を取り上げた。この問題を「最適要求ハミルトン閉路問題」という。最適要求ハミルトン閉路 (optimum requirement Hamilton cycle; ORHC) の定義は次の通りである。ORST 問題と同様に、(無向) 完全グラフ  $G := K_n$  (但し  $V(G) = \{0, 1, \dots, n-1\}$ ) と、各 2 頂点の対  $v, w \in V(G)$  に対して “requirement” 値  $r_{vw}$  (但し  $r_{vw} = r_{wv}$ ) が与えられている。 $G$  のハミルトン閉路 (すなわち  $G$  内の全域閉路)  $C$  と、2 頂点  $v, w \in V(C)$  に対して、

10 この性質を持ついくつかの NP 困難な問題は多項式時間で解決できることが知られている。詳しくは、例えば Burkard et al. [5] を見よ。

11  $k-1$  個の頂点を削除しても連結であるような無向連結グラフを  $k$ -連結であるという。

$C$  における  $v, w$  間の平均パス長 ( $d_{\text{AVG}}(v, w; C)$  と表す) を

$$d_{\text{AVG}}(v, w; C) := d(v, w; C) p(d(v, w; C)) + (n - d(v, w; C)) p(n - d(v, w; C))$$

と定義する。ここで、 $d(v, w; C)$  は  $C$  内の 2 つの  $v$ - $w$ -パスのうち短い方の辺の数、 $p$  は以下を満たす区間  $[0, n]$  上の任意の単調非増加関数（すなわちパスが選ばれる確率）である。

- $0 \leq p(d) \leq 1 \ (\forall d \in [0, n])$
- $p(d) + p(n - d) = 1 \ (\forall d \in [0, n])$

このとき、次の目的関数を最小にする  $G$  のハミルトン閉路  $C$  が ORHC である：

$$h(C) := \sum_{v, w \in V(G); v < w} d_{\text{AVG}}(v, w; C) r_{vw}.$$

そして Anazawa [3] は、各  $r_{vw}$  が GORST 問題における条件 (b) を満たすとき、ORHC を  $O(n)$  時間で構成できることを示した。

**LOTT 問題** 穴沢は、ORHC 問題に取り組んでいた頃に並行して、Hu [9] の ORST 問題と関連の深い別の系譜の問題を考察していた。その問題は、ORST 問題の目的関数を変形して導かれる。完全グラフ  $G := K_n$ 、 $G$  の全域木  $T$ 、および辺  $e \in E(T)$  に対して、 $(V(T), E(T) \setminus \{e\})$  の 2 つの連結成分を  $T_1, T_2$  と表し、 $T$  内の  $e$  の「交通量」 $t(e, T)$  を次のように定義する。

$$t(e, T) := \sum_{x \in V(T_1), y \in V(T_2)} r_{xy}.$$

このとき、ORST 問題の目的関数は次のように変形できる。

$$f(T) := \sum_{v, w \in V(G); v < w} d(v, w; T) r_{vw} = \sum_{e \in E(T)} t(e, T).$$

このことから、次のような目的関数の最適化が想起される。

$$\tau(T) := \max_{e \in E(T)} t(e, T).$$

$r_{vw}$  を 2 都市  $v, w$  間の 1 日当たりの交通量とすれば、 $f(T)$  の最小化は道路網  $T$  全体の交通量を最小にする min-sum 問題であるのに対して、 $\tau(T)$  の最小化は道路網  $T$  の中で最も混雑する区間の交通量を最小にする min-max 問題である。Anazawa [2] は、この min-max 問題をさらに一般化した「辞書式順序最適交通木問題」を提示した。辞書式順序最適交通木 (lexicographically optimum traffic tree; LOTT) の定義は次の通りである。全域木  $T$  の  $n-1$  本の各辺に対する交通量を降順に並べた列を  $\mathbf{t}^T := [t_1^T, t_2^T, \dots, t_{n-1}^T]$  (但し  $t_1^T = \tau(T) \geq t_2^T \geq \dots \geq t_{n-1}^T$ ) と表し、 $\mathbf{t}^T$  が辞書式順序で最小になるような全域木  $T$  を LOTT と定義する。例えば、2 つの全域木  $T^*, \hat{T}$  に対して

$$\mathbf{t}^{T^*} = [12, 10, 6, 6, 6, 6], \mathbf{t}^{\hat{T}} = [10, 10, 10, 6, 6, 6]$$



であるとき、 $t^{\hat{f}}$ の方が $t^{T^*}$ よりも辞書式順序で小さい。LOTTは、各区間の交通量をできるだけ分散させた道路網と解釈できる。ところで、 $G$ の各頂点に次数制約がないとき、 $G$ の全域木 $T$ がLOTTならば、 $T$ はORSTであり、その逆も成り立つことが知られている。一方Anazawa [2] は、 $G$ の各頂点に次数制約がある場合、LOTTとORSTは必ずしも一致しないことを例示した。その上で、すべての $r_{vw}$ の値が1に等しく、かつある与えられた2以上の整数 $L$ に対して $\deg_T(v) \leq L (\forall v \in V(G))$ という制約条件の下では、LOTTを（反復的解法を用いずに）再帰的に定義できることを示した。

## 6. 中山による成果

中山は、1980年代始め頃から、水野弘文教授（元・電気通信大学教授）及び秋山仁教授（現・東京理科大学理数教育研究センター長）の指導の下、主としてグラフ理論の研究に取り組んだ。特に、グラフの辺集合を線形森（無向グラフの場合linear forest、有向グラフの場合linear diforest）に分割する問題を研究した。線形森とは、グラフ $G$ 内の森でその各連結成分がパスとなるときこう呼ばれる。線形樹化数（linear arboricity）とは、グラフの辺集合 $E(G)$ を線形森（の辺集合）に分割するときの最小の分割数のことである。当時、グラフ理論のセミナーが電気通信大学で頻繁に開催されており、群論から転向した数学者や榎本彦衛教授（元・慶應義塾大学教授）など一線の研究者が集結していた。有向グラフにおける線形樹化数の研究はまだ発展の余地があり、中山の修士論文のテーマとなった。修士課程修了後もこの研究を継続した。線形樹化数を求める問題は一般にはNP完全問題（NP-complete problem）である。Perocheは、2正則有向グラフ（2-regular directed graph）に対する線形樹化数を考察し、樹化数が3となることをディスカッションペーパーで発表した。この論文では2正則有向グラフ $G$ は、各頂点 $v \in V(G)$ に対して $|\delta_v^+(v)| = |\delta_v^-(v)| = 2$ となるグラフと定義されている。ところがその論文に不備があり、中山が反例を与えることでその点を指摘した。その後、中山はPerocheと共同で論文作成に取り組むことになり、論文[22]として結実した。

一方、修士課程修了後は、筑波大学大学院社会工学系の課程博士コースに進学し、修士課程から再出発することになった。中山のアルゴリズムに対する理解が不十分であったこともあり研究テーマの設定はずれ込んだ。最終的に、ネットワークフロー問題、特に、最大平衡フロー問題（MBF問題）と最小費用流問題（MCF問題）がテーマとなった。なぜなら、社会工学系のこの課程では、社会との結びつきを重視する研究が重んじられていたからである。そこで、指導教員であった藤重悟教授（元・京都大学数理解析研究所教授）からネットワークフローに関わる研究を命じられた。ここでいう「ネットワークフロー」とは、主に1950～60年代のFordやFulkersonらを中心に行われた研究から発展した

分野である。Fulkerson 賞の名称がつけられた Fulkerson は、大学院修了後、RAND CORPORATION<sup>12</sup> と呼ばれるシンクタンクに就職し、戦時の後方支援の一つとしてネットワーク上の「もの」の流れを研究した。

MBF 問題: ソース (source)  $s$ 、シンク (sink)  $t$  をもつ有向グラフ  $G$ 、容量関数 (capacity function)  $u: A(G) \rightarrow \mathfrak{R}_+$ , 平衡係数関数 (balancing rate function)  $\alpha: A(G) \rightarrow \mathfrak{R}_+ \setminus \{0\}$ , 関数  $\beta: A(G) \rightarrow \mathfrak{R}$  ( $\mathfrak{R}$  は実数の集合) が与えられたとき、2 端子ネットワーク (2-terminal network)  $\mathbf{N} := (G, u, \alpha, \beta, s, t)$  を考える。ネットワーク  $\mathbf{N}$  が与えられたとき、最大平衡フロー問題 (maximum balanced flow problem; MBF 問題) は、次の制約条件

$$\sum_{a \in \delta_G^-(s)} f(a) - \sum_{a \in \delta_G^+(s)} f(a) = -x,$$

$$\sum_{a \in \delta_G^-(v)} f(a) - \sum_{a \in \delta_G^+(v)} f(a) = 0 \quad (v \in V(G) \setminus \{s, t\}),$$

$$\sum_{a \in \delta_G^-(t)} f(a) - \sum_{a \in \delta_G^+(t)} f(a) = x,$$

$$0 \leq f(a) \leq u(a) \quad (a \in A(G)),$$

$$f(a) \leq \alpha(a)x + \beta(a) \quad (a \in A(G)). \quad \dots\dots\dots (*)$$

を満たすという条件のもとで  $x$  を最大にする問題である。上記制約条件の 2 番目と 4 番目をそれぞれ流量保存則 (flow conservation law)、容量制約 (capacity constraint) と呼ぶ。この問題は、最大フロー問題 (maximum flow problem) に制約条件 (\*) が付加された問題と捉えることもできる。この研究は仏人研究者 Minoux による文献 [12] が出発点となった。彼は 2 端子ネットワークが与えられたとき、各辺の流量がソースからシンクへの総流量の一定の比率で抑えられるような最大フローを見つける問題を考え、そのアルゴリズムを提案した。なお、その比率は平衡係数関数として与えられている。この研究の動機は、通信ネットワークにおいて、故障などで回線が通信不能になったとき、その被害を最小限に抑えたいということであった。ここで、回線の故障は高々 1 箇所を仮定している。これは統計により、2 箇所以上の断線は稀であるという事実に基づいている。中山の論文 [13] では、この平衡係数関数が一定の場合に、ニュートン法的な振る舞いをする効率的アルゴリズムを開発した。ニュートン法 (Newton's Method) は、方程式  $F(x) = 0$  の解  $x$  を低次の微分を利用して (数値計算で) 求める代表的な手法である。Minoux が最初に考察した最大平衡フロー問題では辺の流量の下限がゼロかつ平衡係数関数が一定の場

<sup>12</sup> ランド研究所として知られる。アメリカ陸軍航空軍の戦略立案と研究を目的としたランド計画 Project RAND を実現する組織を経て 1948 年に設立された。

合であった。中山の論文[15]では、彼のモデルを拡張した問題を議論した。具体的には、ネットワークの各辺に対して、その下限容量を設定するとともに、平衡係数関数も一般化した。この拡張問題の性質を調べるとともに、多項式時間のアルゴリズムを開発した。この解法は、2端子ネットワークの最大フローを求めながら二分探索を繰り返すという点に特徴がある。最大平衡フロー問題を別の角度から考察したのが論文[6]で、藤重悟教授が中心となってまとめた共著論文である。同教授は、ある種の重みつきミニマックスフロー問題 (minimax flow problem) を提案し、これら2つの問題が同値であることを証明した。このミニマックスフロー問題は、各辺に重みが与えられたとき、その辺の流量と重みとの積の辺集合内での最大値が最小となるフローを見つけるというものである。

ところで、最大平衡フロー問題は、その制約条件(\*)を見ればわかるように、ネットワーク内の各辺の流量が総流量のある比率で押さえられるというモデルであった。中山の論文[16]では、平衡フローと似た平衡概念を導入した。つまり、ネットワーク内の各頂点に対して、その点に入る各辺の流量がその点に入り込む総流量のある比率で押さえられるという制約条件

$$\max_{a \in \delta_G^-(v)} f(a) \leq \alpha'(v) \sum_{a \in \delta_G^-(v)} f(a) \quad (v \in V(G) \setminus \{s\}) \dots\dots\dots (**)$$

である。中山は、この条件に加え容量制約と流量保存則を満たす関数  $f$  を点平衡フロー (vertex-balanced flow) と名付けた。ここで、 $\alpha': V(G) \rightarrow \Re_+ \setminus \{0\}$  は点平衡係数関数 (vertex-balancing rate function) である。そして、この点平衡フローの中でシンクに流れ込む純流入量を最大にするという最大点平衡フロー問題 (maximum vertex-balanced flow problem) を提案した。さらに、この問題に対する近似アルゴリズムを開発し、各辺のフロー値が整数となる点平衡整数フロー (vertex-balanced integral flow) を見つける問題は NP-完全であることも証明した。中山の論文[23]では、Minoux が提案した最大平衡フロー問題と一般化最大フロー問題 (generalized maximum flow problem) を包含した新しい問題、つまり、一般化最大平衡フロー問題 (generalized maximum balanced flow problem) を提案し、2つの効率的アルゴリズムを発表した。1つは二分探索法によるもので、もう一方はパラメタ (parameter) を含むネットワークを考え、パラメトリックなアルゴリズムである。このアルゴリズムは、パラメタを変化させながら、パラメタを含む子問題を繰り返し解くことで最適解へと導く手法である。

中山が博士後期課程に在籍するころ、もう一つのフロー問題である最小費用流問題 (minimum cost flow problem) にも取り組むことになった。この問題は、各辺に容量と単位流量当りの費用が与えられたネットワークに対して、各頂点での流量保存則と各辺での容量制約を満たすフローの中で、ネットワークの辺の費用の合計が最小となるフローを見つけるものである。その背景は次の通りである。この問題は線形計画問題 (linear

programming problem) の特殊な場合であり、これまでに最適解を見つける多項式アルゴリズム (polynomial algorithm) は多数知られていたが、強多項式アルゴリズム (strongly polynomial algorithm) の存在は二十年以上未解決のままであった。藤重悟教授もこの未解決問題に強い関心をもたれ取り組まれてきた。ところが、1985 年、Tardos により肯定的に解決された (文献 [27]、1988 年 Fulkerson 賞受賞)。ところで、線形計画問題において双対単体法 (dual simplex method) は代表的な解法の一つであり、ネットワーク版に改良したネットワーク双対単体法 (network dual simplex method) も幾つか知られていた。中山は、論文 [14] でより効率的なネットワーク双対単体法を実現させた。

2000 年前後は、内藤雄志准教授 (現・滋賀大准教授) と 4 年間共同研究を行った。これはポセット (poset) とゲームの理論 (theory of games) に関するものである。その背景を若干補足する。集合族上の関数に関する性質にサブモジュラー性がある。集合  $S$  に対して関数  $f: 2^S \rightarrow \mathfrak{R}$  がサブモジュラー (submodular) とは

$$f(V \cup W) + f(V \cap W) \leq f(V) + f(W) \quad (\forall V, W \subseteq S)$$

を満たすときをいう。藤重悟教授は、離散最適化研究の世界的な権威として知られているが、「ミスター・サブモジュラー」との異名ももつ。この性質は、マトロイド (matroid) と呼ばれるある構造をもった有限集合を一般化させた概念であり、サブモジュラー性をもつ関数の最適化問題は、広範囲の組合せ最適化問題を包含しており、前者の効率的な解法が後者の問題の解を高速に導く可能性が高いことが知られていた。ポセット上の関数最適化やゲームの理論における特性関数がサブモジュラー性をもつ場合もしかりである。当時、内藤准教授はポセット上のある最適化問題に取り組んでいた。中山もゲームにおける特性関数がサブモジュラー性をもつ場合に興味をもっていた。このような流れの中で、お互いの利害が一致し共同研究することになったわけである。まず、必要事項を説明する。

$S$  を空でない集合とする。 $S$  上の 2 項関係 (binary relation)  $\preceq$  は、反射律 (reflexivity,  $a \in S$  に対して  $a \preceq a$ )、非対称律 (antisymmetry,  $a, b \in S$  に対して  $a \preceq b \Rightarrow b \not\preceq a$ )、推移律 (transitivity,  $a, b, c \in S$  に対して  $a \preceq b, b \preceq c \Rightarrow a \preceq c$ ) を満たすとき、半順序 (partial order) と呼ばれる。半順序  $\preceq$  の構造をもつ  $S$  は半順序集合 (partially ordered set) あるいはポセット (poset) と呼ばれ、 $(S, \preceq)$  で表される。ポセット  $(S, \preceq)$  は、 $\forall x, y \in S$  に対して、 $\{x, y\}$  の最小上界 (least upper bound) と最大下界 (greatest lower bound) が共に存在するとき、束 (lattice) という。

次に、ゲーム理論の導入を行う。競合関係にあるプレーヤー (players) が、ある規則にしたがって行う競技をゲーム (game) という。相手の行動が不明で自分の手を決められない場合、あるいは一部のプレーヤーが提携 (coalitions) して意思決定する場合、ど

のように行動すれば最も得か（損失が最も少ないか）などを考えたりするのがゲーム理論である。ゲームは、じゃんけん、トランプだけでなく、市場における競争や軍事戦略も含まれる。最近では、中山が所属する日本オペレーションズ・リサーチ学会において、環境問題や電力平準化への応用も見られる。ゲーム理論においては、様々な解の概念が存在する。ナッシュ均衡（Nash equilibrium）、コア（core）、カーネル（kernel）などがあり、最初のものは映画で上映されたこともあり特に有名であろう。2番目の概念は中山の研究成果との関連も含め、後で解説を加える。

ゲームとは、プレーヤーの集合  $N$  と特性関数（characteristic function） $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$  の組  $(N, v)$  である。ただし、 $v(\emptyset) = 0$  とする。ゲーム  $(N, v)$  が凸（convex）とは、特性関数  $v$  がスーパーモジュラー（supermodular）、つまり、

$$v(V \cup W) + v(V \cap W) \geq v(V) + v(W) \quad (\forall V, W \subseteq N)$$

を満たすときをいう。ここで、関数  $g := -v$  はサブモジュラーとなることに注意せよ。特性関数  $v$  のコア（core）とは、次のように定義される配分（imputation）の集合である。

$$C(v) := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in N} x_i = v(N), \sum_{i \in M} x_i \geq v(M), \forall M \subseteq N, M \neq N, M \neq \emptyset \right\}.$$

つまり、コアとはいかなる配分にも支配されない配分の集合である。

さて、中山の研究成果に戻る。内藤准教授との最初の成果として論文[24]を得た。集合  $E$  のべき集合  $2^E$  上の関数  $f$ 、パラメタ  $\lambda$ 、部分集合  $E' \subseteq E$  を考える。このとき、次の最小化問題

$$\min_{\Pi \in \mathcal{F}_{E'}} \sum \{ (f - \lambda)(X) : X \in \Pi \}$$

を考察した。ただし、 $(f - \lambda)(X) = f(X) - \lambda$ 、 $\mathcal{F}_{E'}$  は  $E'$  の分割の集合とする。この研究に至った背景は、 $K$ -辺連結でないグラフを  $K$ -辺連結にするための最小拡大問題があり、その最適解の性質を特徴づけたかったからである。

一方、Shapley は凸ゲーム（convex game）が分解可能であるための必要十分条件を与える定理を発表した。内藤准教授との共著論文[25]では、Narayanan の定理とこの Shapley の定理を包含する新しい定理を発見した。さらに、Chan は提携をもったゲームのカーネル、 $\varepsilon$ -コア、妥当集合の間の包含関係を考察した。なお、 $\varepsilon$ -コア  $C_\varepsilon(v)$  とは、次のように定義される。

$$C_\varepsilon(v) := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in N} x_i = v(N), \sum_{i \in M} x_i \geq v(M) - \varepsilon, \forall M \subseteq N, M \neq N, M \neq \emptyset \right\}$$

$\varepsilon$ -コアとはコアを緩めた概念で、各配分を  $\varepsilon$  だけ減らした配分には支配されない配分の集合となっている。ここで、 $\varepsilon = 0$  の場合の  $\varepsilon$ -コアはコアに一致することに注意する。



これに対して、中山の短い論文 [21] は、Chan の結果に対する問題点を指摘し、 $\varepsilon$ -コアに関する新たな  $\varepsilon$  の設定とゲームに分解可能性という条件を課すことで Chan の定理を証明し直した。

2000 年初期は恥ずかしながら上記以外の結果はない。実は、竹内外史氏による著書「 $P \neq NP$ 」(文献 [34]) の最後に、フォーシングの理論を用いると今世紀の代表的未解決問題の解決に大きく繋がるだろうという記述があった。これに触発され、2005 年頃までこの問題にのめり込んだ。研究自体は楽しかったが、結局、関連結果は何も得られなかった。2005 年以降は、穴沢との研究会開催、共同研究と繋がっていく。

## 7. 共同研究による成果

筆者 2 名による共同研究は、2005 年頃から始まった。当初は、研究というよりも Korte & Vygen [10] を教科書として輪読し、ネットワーク理論を基礎から理解するための勉強会であった。一般に、ネットワーク理論の教科書や論文は「行間が広い」ことが多いため、筆者はそこを埋めるための命題や証明法を数多く考案した。そして、そうした副産物が未解決問題の解決や新たな解法の提案に役立つと直感した筆者は、次の 2 つのプロジェクトに力を注ぐことになった。

1 つ目は、一般化最大フロー問題の解法とその計算量を、厳密な議論に基づいて分析することである。この問題は、2002 年の Goldfarb et al. [8] 以降、目立った進展が見られなかった。筆者はその原因として、この分野の論文には定式化が少なく、証明の行間も大きく飛んでいるため、妥当性の検証が困難であると考えていた。そこで筆者は、ネットワーク理論の基礎となるグラフ理論、計算量の理論、線形計画法について（過度に難解にならない範囲で）厳密に再構成し、それらを基に古典的な問題（最短路問題と最大フロー問題）の解法を、曖昧さが微塵も入り込まない形で再検証した。一方で、「正則なネットワーク」という分析フレームワークを考案し、このフレームワークと古典的な問題の再検証で得た知見を用いて、Goldfarb et al. [8] の手法を厳密に分析した。その結果が、拙著（中山・穴沢 [36]）の形で結実した。拙著は、学術的には教科書の位置付けではあるが、既存の文献では見られない証明のノウハウを盛り込んでおり、この分野の最先端の研究に資するものと自負している。

2 つ目は、最短路問題に対する解法の開発である。最短路問題にはいくつかのバリエーションが存在するので、まずは筆者が取り組んだ問題を明確にしよう。有向グラフ  $G$  と、「長さ関数」と呼ばれる  $E(G)$  上の実数関数  $l$  が与えられたとき、 $N := (G, l)$  を（狭義の）ネットワークという。2 頂点  $v, w \in V(G)$  に対して  $G$  内に  $v$ - $w$ -パス  $P$  が存在する



とき、 $l(P) := \sum_{e \in E(P)} l(e)$  を  $P$  の長さとして定義し、複数存在する  $v$ - $w$ -パスの中で最も短いものを最短  $v$ - $w$ -パスと呼ぶ。筆者は、「ソース」と呼ばれる特別な頂点  $s$  から各頂点  $v \in V(G)$  までの最短  $s$ - $v$ -パスを求めるという最もオーソドックスな問題に取り組んだ。この問題の解法としては、関数  $l$  が非負の場合はダイクストラ法（以下、D法）、 $l$  が負の値を取り得る場合<sup>13</sup>はムーア・ベルマン・フォード法（以下、MBF法）がよく知られている。また、 $l$  が非負の場合はD法とMBF法のどちらでも解けるがD法の方が効率的であること、 $l$  が負の値を取る場合はD法では正解が得られない場合があることも周知の事実である。筆者は、 $l$  が負の値を取る場合でもD法をうまく活用して解を得る方法がないかという問題意識の下で、新たな解法について考察した。その足掛かりとなったのが、「ポテンシャル」と「修正長さ」という2つの概念である。「ポテンシャル」と呼ばれる  $V(G)$  上の実数関数  $\pi$  に対して、「修正長さ関数」 $l_\pi$  を  $l_\pi(e) := l(e) + \pi(\partial_g^+(e)) - \pi(\partial_g^-(e))$  ( $e \in E(G)$ ) と定義し、 $\mathbf{N}_\pi := (G, l_\pi)$  を修正ネットワークと呼ぶ。筆者は、Nakayama & Anazawa [18] の中で、次のようなアルゴリズムを考案した（概略のみ示す）。

(S1)  $\pi(v) = 0$  ( $\forall v \in V(G)$ ) とおく。

(S2) 修正長さ関数  $l_\pi$  が非負となるまで、(S2.1) を繰り返す。

(S2.1) 修正ネットワーク  $\mathbf{N}_\pi$  を (D法が適用できるように) 拡張または変更<sup>14</sup> したネットワークにD法を適用し、その結果からポテンシャル  $\pi$  を更新する。

(S3)  $\mathbf{N}_\pi$  にD法を適用し、その結果から元のネットワーク  $\mathbf{N}$  に対する解を逆算する。

このアルゴリズムのポイントは、(S2.1) を繰り返すたびに修正ネットワーク内の長さが負の辺の数が単調減少することである。Nakayama & Anazawa [18] は、このアルゴリズムにおいて高々  $n_0$  回D法を適用することによって、元のネットワーク  $\mathbf{N}$  に対する解が得られることを示した。但し、 $n_0$  は  $l$  の値が負の辺の始点または終点となる頂点の数である。

この研究と並行して、Nakayama & Anazawa [17] は（上記とやや異なるアイデアではあるが）同様にD法を繰り返し適用して、長さが負の辺があるネットワークの最短路問題を解くアルゴリズムを提案した。最近では、Nakayama et al. [19] が長さ関数に整数性を仮定した最短路問題に取り組んだ。一般に、長さ関数が整数の値しか取らない場合は、ダイヤル法やスケーリング法を導入してD法などの解法を高速化できることが知られている。Nakayama et al. [19] は、Nakayama & Anazawa [18] の手法にダイヤル法とスケー

13 但し、負の開路は含まない、すなわち  $G$  内の任意の開路  $C$  に対して  $l(C) \geq 0$  となることを仮定する。

14 Nakayama & Anazawa [18] は (S2.1) の方法が若干異なる2つのアルゴリズムを提示した。いずれも (S2.1) において一部の辺に対する長さを変更するが、一方はスーパーソースと呼ばれる特別な頂点の追加と辺の追加・削除が伴う方法であり、もう一方は頂点と辺の追加・削除が一切ない方法である。どちらも理論的な計算量は同一である。

リング法を組み込む方法を提案し、数値実験でその方法が既存の方法より効率的になる場合があることを示した。

## 8. 今後の展望（結語に代えて）

本稿のまとめとして、筆者2名に残された今後の課題について整理しよう。

まず、共同研究で残された課題について触れる。これまで、ネットワーク理論について長いキャリアと深い造詣を有する中山と、キャリアは短いがエレガントな論理展開を探索する穴沢が、互いに補完しながら、上記にあげた諸問題に取り組み、いくつかの成果を上げてきた。今後も可能な限り、この共同研究を継続することを考えている。残された課題は多岐に及ぶが、特に次の3項目に重点を置きたい。

①ダイクストラ法をうまく活用した効率的なアルゴリズムの開発。

②これまでに開発したアルゴリズムの効率を（理論的方法ではなく）数値実験で検証。

③（長期的課題として）一般化最大フロー問題および一般化最小費用流問題のより効率的な解法の開発。

①はこれまでの研究の継続である。②は、ここ最近の「アルゴリズムの評価は理論的計算量だけでなく数値実験でも行うべき」という学界の潮流を受けたものである。③は筆者2名にとっての究極の課題であるが、難問であることも知られているので、長期的に悶絶することを覚悟しなければならない。

一方、筆者のそれぞれが過去に取り組み、やり残した課題もある。穴沢に関してだけ述べれば、第5節で紹介したネットワーク設計問題には、多くの未解決問題が存在するが、穴沢はそこからしばらく遠ざかっている。片山[31]が示唆するように、ネットワーク設計問題には多くのNP困難問題がある。そうした問題に対し、穴沢がかつて取り組んでいたように、最適解が多項式時間アルゴリズムで得られるような特別な場合（問題パラメータ）の特徴（凸性、Monge性など）を見出す余地は、まだまだあると考えている。特に、穴沢自らが提示したLOTT問題は、様々な切り口から研究が可能であり、今後のライフワークになりうる課題といえる。

最後に、応用分野への挑戦について触れなければならない。第1節でも述べたように、「ネットワーク理論」はモノを流す仕組みの最適化といった実用的側面から出発しており、その研究成果が果たして実社会に役立つものなのか、常に自省しながら取り組むべきものである。これまで主として理論畑で研究に取り組んできた筆者2名が、今後貢献しうる応用分野として、次の2つを挙げておく。1つ目は、第3節で述べた「ネットワーク分析」への貢献である。この分野は、用語の違いはあるにせよグラフ理論を基礎においており、筆者が取り組む「ネットワーク理論」との親和性が高い。加えて、「ネットワーク分析」

においても様々な尺度を計算するためのアルゴリズムが必要とされており、そうしたアルゴリズムの改良や開発、およびその計算量の評価に対しては、筆者が貢献できるものと期待できる。2つ目は、経済学や工学への貢献である。これらこそ、本来「ネットワーク理論」が活用されるべき分野かも知れない。実際、第4節で「ネットワーク理論」の応用事例の一部を示した。特に中山は、Nakayama & Gang [20] で財務データ分析への応用に果敢に取り組んでいる。しかし、経済学や工学での応用に踏み込むには、専門知識の壁が大きく立ちはだかることも事実である。それらを打ち破ってこと本物のアナリストというのは正論だが、一方で筆者自身が魅力を感じ得意とする分野をより一層極めたいという欲求は、禁じ得ないものである。応用分野への貢献という社会的な要請に応えるためには、その分野の専門家との新たなパートナーシップを確立することが、鍵になるかも知れない。

## 謝辞

本稿は、平成 25、26 年度久留米大学ビジネス研究所・個人研究の助成を受けた研究成果の一部である。

## 参考文献

- [1] T. Anazawa : A Generalized Optimum Requirement Spanning Tree Problem with a Monge-like Property. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 43, No. 3 (2000), 417-428.
- [2] T. Anazawa : Lexicographically Optimum Traffic Trees with Maximum Degree Constraints. *Ars combinatoria*, 61 (2001) 149-160.
- [3] T. Anazawa : Optimum Requirement Hamilton Cycle Problem with a Monge-like Property. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 45, No. 1 (2002), 36-43.
- [4] F. Bonchi, C. Castillo, A. Gionis, and A. Jaimes : Social network analysis and mining for business applications, *ACM Transactions on Intelligent Systems and Technology*, Vol. 2, No. 3 (2011), Article 22, 22 : 1-22 : 37.
- [5] R. E. Burkard, B. Klinz and R. Rudolf : Perspectives of Monge Properties in Optimization. *Discrete Applied Mathematics*, 70 (1996) 95-161.
- [6] S. Fujishige, A. Nakayama and W. T. Cui : On the equivalence of the maximum balanced flow problem and the weighted minimax flow problem, *Operations Research Letters*, Vol.5, No.4 (1986), 207-209.
- [7] B. Golden, M. Liberatore and C. Lieberman : Models and solution techniques for cash flow management, *Computer & Operations Research*, Vol. 6, No.1 (1979), 13-20.
- [8] D. Goldfarb, Z. Jin and Y. Lin : A Polynomial Dual Simplex Algorithm for the Generalized Circulation Problem, *Math. Programming*, Vol. Ser. A 91 (2002), 271-288.
- [9] T. C. Hu : Optimum Communication Spanning Trees. *SIAM Journal of Computing*, 3 (1974) 188-195.
- [10] B. Korte and J. Vygen : *Combinatorial Optimization*, Springer-Verlag, 2000.

- [11] R. Levien and A. Aiken : Attack-Resistant trust metrics for public key certification. In Proceedings of the 7th USENIX Security Symposium. 229-242, 1998.
- [12] M. Minoux : Flots équilibrés et flots avec sécurité, E. D. F-Bulletin de la Direction des Études et Recherches, Série C —Mathématiques, *Informatique* Vol. 1 (1976) , 5-16.
- [13] A. Nakayama: A polynomial algorithm for the maximum balanced flow problem with a constant balancing rate function, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 29, No. 4 (1986) , 400-409.
- [14] A. Nakayama : A polynomial-time dual simplex algorithm for the minimum cost flow problem, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 30, No. 3 (1987) , 265-290.
- [15] A. Nakayama: A polynomial-time binary search algorithm for the maximum balanced flow problem, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 33, No. 1 (1990) , 1-11.
- [16] A. Nakayama: NP-completeness and approximation algorithm for the maximum integral vertex-balanced flow problem, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 34, No. 1 (1991) , 13-27.
- [17] A. Nakayama and T. Anazawa: New Dijkstra-based Algorithm for the Single-source Shortest Path Problem: Successive Applications of Reduced Length Functions, *Proceedings of Asian Conference of Management Science & Applications* (2012) , 319-328.
- [18] A. Nakayama and T. Anazawa : Dijkstra-based Algorithms for the Shortest Path Problem with Edges of Negative Length. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 56, No. 2 (2013) , 137-154.
- [19] A. Nakayama, T. Anazawa, and A. Takahashi : A New Efficient Scaling Algorithm for Finding Shortest Paths in a Network with an Integral Length Function, *Proceedings of Asian Conference of Management Science & Applications* (2015) , 1-15.
- [20] A. Nakayama and P. L. Gang: Improved Algorithm Using Generalized Flows for an Optimization Problem in a Cash Flow Network, *Asian Journal of Management Science and Applications*, Vol. 1, No.1 (2013) , 67-95.
- [21] A. Nakayama and T. Naitoh: On some properties of the  $\varepsilon$ -core of games with coalition structure, *International Journal of Game Theory*, Vol. 28 (1999) , 253-255.
- [22] A. Nakayama and B. Peroche: Linear arboricity of digraphs, *Networks*, Vol. 17 (1987) , 39-53.
- [23] A. Nakayama and C. F. Su: Two efficient algorithms for the generalized maximum balanced flow problem, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 40, No. 2 (2002) , 162-173.
- [24] T. Naitoh and A. Nakayama: Structures of subpartitions related to a submodular function minimization, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, Vol. 14, No. 1 (1997), 25-32.
- [25] T. Naitoh and A. Nakayama: Structures of sublattices related to Veinott relation, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 40, No. 2 (1997) , 276-280.
- [26] J. V. de Avila Pacheco and R. Morabito: Application of network flow models for the cash management of an agribusiness company, *Computer & Operations Research*, Vol. 61, No.3

- (2011), 848-857.
- [27] É. Tardos : A strongly polynomial minimum cost circulation algorithm, *Combinatorica*, Vol. 5, Issue 3 (1985), 247-255.
  - [28] O. Wodo, S. Tirthapura, S. Chaudhary, and B. Ganapathysubramanian: A graph-based formulation for computational characterization of bulk heterojunction morphology, *Organic Electronics*, Vol. 13, Issue 6 (2012), 1105-1113.
  - [29] C.-N. Ziegler and G. Lausen: Propagation models for trust and distrust in social networks, *Information Systems Frontiers*, Vol. 7, No. 4-5 (2005), 337-358.
  - [30] 穴澤務：『ネットワーク分析の新潮流ーネットワーク分析の理論的展開ー』（パワーポイント）、経営行動科学学会第11回年次大会（2008. 11. 9, 於・中部大学）。
  - [31] 片山直登：『ネットワーク設計問題』、朝倉書店、2008。
  - [32] 鈴木光男、武藤滋夫：『協力ゲームの理論』、東京大学出版会、1985。
  - [33] 鈴木光男：『新ゲーム理論』、勁草書房、1995。
  - [34] 竹内外史：『P と NPー計算量の根本問題』、日本評論者、1996。
  - [35] 田原仁：『MBG 川越事業所の紹介』、*PIONEER R&D*, Vol. 19, No. 1 (2009)、44-57。
  - [36] 中山明・穴澤務：『ネットワーク理論ーモノの流れを科学するー』、アイ・ケイ コーポレーション、2014。
  - [37] 安田雪：『実践ネットワーク分析ー関係を解く理論と技法』、新曜社、2001。
  - [38] 与謝野有紀ほか（編）：『社会の見方、測り方ー計量社会学への招待』、勁草書房、2006。